MÉDIAN

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1

1. *Les opérations $\star$ et $\diamond$ sont-elles des lois de groupe pour l'ensemble $\{a, b, c\}$ (on admettra que les lois $\star$ et $\diamond$ sont associatives) ? Justifier.*

$\star$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

$\diamond$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + z + z^2 = 0$. On note j la solution dont la partie imaginaire est positive. Montrer que $j^2 = \overline{j}$. Représenter $1, j, j^2$ dans le plan complexe.*

3. *Montrer à l'aide de la question* **1.** *que $\{1, j, j^2\}$ est un groupe pour la loi $\times$ (où $\times$ est la multiplication usuelle sur $\mathbb{C}$).*

4. *Soit $G = \{e, \alpha, \beta\}$ un groupe quelconque à trois éléments pour une loi $*$.*

a. *Recopier la table suivante*

$*$	e	α	β
e			
α			
β			

et compléter la première ligne et première colonne (e représente l'élément neutre pour $*$). Peut-on avoir $\alpha^2 = \alpha * \alpha = e$?

b. *Combien de tables différentes peut-on obtenir pour les groupes à trois éléments ?*

[7 points]

Exercice 2

Soient les matrices à coefficients réels A et B définies de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer B^2, B^3. En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence.*

2. *Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}.*

3. *Montrer que $A = PBP^{-1}$.*

4. *En déduire que $A^n = PB^nP^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

5. *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

[7 points]

Tournez S.V.P

Exercice 3

1. *On considère le polynôme* P *de* $\mathbb{R}[X]$ *défini par* $P(X) = X^3 + 2X^2 + 2X - 5$.
   a. *Vérifier que* 1 *est racine de* P *et factoriser* P *en produit de polynômes irréductibles sur* $\mathbb{R}[X]$.
   b. *Décomposer* $\dfrac{P'}{P}$ *en éléments simples sur* $\mathbb{R}(X)$.
   c. *On rappelle que la fonction logarithme* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *vérifie les propriétés suivantes :*
      i. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
      ii. $\ln(|f|)' = \dfrac{f'}{f}$ *(*f *est une fonction dérivable).*

   En calculant $\ln(|P|)'$ *et en utilisant les propriétés i. et ii. retrouver la décomposition de* $\dfrac{P'}{P}$ *sans faire de calculs.*

2. *Soit* $Q(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i) = (X - a_1)(X - a_2)\dots(X - a_n)$ *un polynôme de* $\mathbb{R}[X]$ *n'ayant que des racines simples réelles distinctes.*
   a. *Montrer que* $\dfrac{Q'}{Q} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - a_i} = \frac{1}{X - a_1} + \cdots + \frac{1}{X - a_n}$ *(on pourra utiliser la question* **1.c.***).*
   b. **[hors barème]** *Soit* α *une racine de* Q'. *Montrer que*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\alpha - a_i)^2}\right)\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\alpha - a_i)^2} a_i$$

   c. **[hors barème]** *On suppose que les racines de* Q *sont ordonnées de sorte que* $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. *Déduire de l'égalité précédente que* $a_1 < \alpha < a_n$ *où* α *est une racine de* Q'.

[6 points]+[3 points hors barème]