MÉDIAN

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif.

Une feuille A4 manuscrite est autorisée pour l'épreuve ainsi que les calculatrices et traducteurs.

Exercice 1

(Applications directes du cours)

1. **Questions de cours** *: Répondre aux questions suivantes par VRAI ou FAUX. Les réponses VRAI seront justifiées par une démonstration et les réponses FAUX par la donnée d'un contre-exemple. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*
   - **a.** *Une suite (u_n) croissante est-elle nécessairement divergente vers $+\infty$?*
   - **b.** *Une suite (u_n) divergente vers $+\infty$ est-elle nécessairement croissante ?*
   - **c.** *Une suite (u_n) croissante et non majorée diverge-t-elle nécessairement vers $+\infty$?*
2. **(équation dans $\mathbb{C}$)** *Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation suivante :*
$$z^2 + (3+i)z + \frac{7}{4} + i = 0.$$
3. *Le sous-ensemble $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$?*
4. **Réels et rationnels**
   - **a.** *Si x, $y \in \mathbb{Q}$ a-t-on $xy \in \mathbb{Q}$? Justifier.*
   - **b.** *Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$, a-t-on $xy \in \mathbb{R} - Q$ ou $xy \in \mathbb{Q}$? Justifier.*
   - **c.** *Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, a-t-on $xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$? Justifier.*

[7 points]

Exercice 2

(Calcul matriciel)
On rappelle que dans un anneau, si $ab = ba$ alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n. (indication : vous pouvez soit faire un raisonnement par récurrence, soit remarquer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$).*
2. *Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

[7 points]

★ TOURNEZ LA PAGE ★

Exercice 3

(Une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$)

Dans cet exercice on définit une relation binaire sur $\mathbb{C}$. Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes alors on dira que :

$$z_1 \preceq z_2 \text{ si et seulement si } a_1 < a_2 \text{ ou } (a_1 = a_2 \text{ et } b_1 \leqslant b_2).$$

Par exemple on a $2+5i \preceq 3+i$ (car $2 < 3$) et $2+i \preceq 2+5i$ (car $2 = 2$ et $3 \leqslant 5$). Par contre $3+7i \npreceq 2+8i$.

1. *Montrer que $\preceq$ définit une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.*

2. *Cette relation est-elle d'ordre total ? Jusitifier.*

3. *Montrer que $\preceq$ est compatible avec l'addition, c'est à dire pour tout $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on a*

$$z_1 \preceq z_2 \Rightarrow z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3.$$

4. *Monrer que $0 \preceq i$, en déduire que $\preceq$ n'est pas compatible avec la multiplication.*

5. **[question bonus]** *Montrer que $(\mathbb{C}, \preceq)$ vérifie la propriété de la borne supérieure (une démonstration à l'aide d'un dessin suffira). Expliquer alors pourquoi la relation $\preceq$ ne pouvait être compatible avec les opérations.*

[7 points]

Corrections

Exercice 1

1. **a.** *FAUX : la suite (u_n) définie par $u_n = -\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.* **[0,75]**

   b. *FAUX : la suite (u_n) définie par $u_{2k} = 2k$ et $u_{2k+1} = 2k-1$ n'est pas croissante et pourtant $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.* **[0,75]**

   c. *VRAI .(Ici il faut démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$). Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Soit $M > 0$. La suite étant non majorée, il existe une valeur $N \in \mathbb{N}$ telle que $u_N > M$. De plus la suite est croissante donc pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \geqslant u_N > M$. Conclusion on a montré que pour tout $M > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_n > M$. C'est exactement la définition de $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.* **[1]**

2. $z_1 = \frac{-3+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+i(-1+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})}{2}$ *et* $z_1 = \frac{-3-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+i(-1-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}})}{2}$ *(pour la méthode voir TD).* **[1,5]**

3. *H n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ puisque $(0,0)$ l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ n'appartient pas à H.* **[1]**

4. **a.** *$x, y \in \mathbb{Q}$ donc il existe $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ et $q_1, q_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p_1}{q_1}$ et $y = \frac{p_2}{q_2}$. D'où $xy = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} \in \mathbb{Q}$.* **[0,5]**

   b. *Il y deux cas. Cas 1, $y \neq 0$. Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}^*$ alors $xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. En effet, $y \in \mathbb{Q}^*$ et supposons $xy \in \mathbb{Q}$ donc il existe $p \in \mathbb{Z}^*$, $r \in \mathbb{Z}$ et $q, s \in \mathbb{N}$ tels que $y = \frac{p}{q}$ et $xy = \frac{r}{s}$. Comme $p \neq 0$ on en déduit $x = \frac{q}{p} \times \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ absurde.*
   Cas 2 $y = 0$. Si $y = 0$ alors $xy = 0 \in \mathbb{Q}$. **[0,75]**

   c. *Non. Contre-exemple $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $y = \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $xy = 2 \in \mathbb{Q}$.* **[0,75]**

Exercice 2

1. *$A = C + D$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$). On a évidemment $CD = DC$ puisque $C = I_3$ on peut donc appliquer la formule du binôme et ainsi*

$$A^n = (C+D)^n = C^n + nC^{n-1}D + \frac{n(n-1)}{2}C^{n-2}D^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}C^{n-3}D^3 + \cdots + D^n.$$

Or on a $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D^n = (0)$ pour $n \geqslant 3$ (et bien sûr $C^k = C$). D'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[3,5]

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *On peut écrire* $B = E + F$ *avec* $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On vérifie que* $EF = FE$. *On montre par récurrence que* $E^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. *Au rang* $n = 0$, $E^0 = I_3$ *c'est vrai. Au rang* n *on suppose* $E^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, *ainsi* $E^{n+1} = E^n \times E =$
$\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n \times 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$. *La relation est vraie au rang* $n+1$ *donc par récurrence elle est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *D'autre part on montre que* $F^n = (0)$ *pour tout* $n \geqslant 2$, *donc en appliquant la formule du binôme de Newton on obtient :* $B^n = E^n + nE^{n-1}F$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$ **[3,5]**

Exercice 3

1. *Montrons que* $\preceq$ *est bien une relation d'ordre.*
   La relation est réflexive : $z = a + ib \in \mathbb{C}$, *on a* $a = a$ *et* $b \leqslant b$ *donc* $z \preceq z$.
   La relation est antisymétrique : soient $z_1 = a_1 + ib_1$ *et* $z_2 = a_2 + ib_2$ *vérifiant* $z_1 \preceq z_2$ *et* $z_2 \preceq z_1$. *La première relation équivaut à* $a_1 < a_2$ *ou* ($a_1 = a_2$ *et* $b_1 \leqslant b_2$). $a_1 < a_2$ *est impossible sinon on ne peut avoir* $z_2 \preceq z_1$. *Donc* $a_1 = a_2$ *et* $\begin{cases} z_1 \preceq z_2 & \Rightarrow & b_1 \leqslant b_2 \\ z_2 \preceq z_1 & \Rightarrow & b_2 \leqslant b_1 \end{cases}$
   Ainsi $b_1 = b_2$ *et* $z_1 = z_2$.
   La relation est transitive : soient $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ *et* $z_3 = a_3 + ib_3$ *tels que* $z_1 \preceq z_2 \Leftrightarrow a_1 < a_2$ *ou* ($a_1 = a_2$ *et* $b_1 \leqslant b_2$) *et* $z_2 \preceq z_3 \Leftrightarrow a_2 < a_3$ *ou* ($a_2 = a_3$ *et* $b_2 \leqslant b_3$).
   Distinguons les différents cas :
   - si $a_1 < a_2$ *alors* $a_1 < a_3$ *(puisque* $z_2 \preceq z_3 \Rightarrow a_2 \leqslant a_3$*). Donc* $z_1 \preceq z_3$.
   - si $a_1 = a_2$ *et* $b_1 \leqslant b_2$ *alors soit* $a_2 < a_3 \Rightarrow a_1 < a_3 \Rightarrow z_1 \preceq z_3$, *soit* $a_2 = a_3$ *et* $b_2 \leqslant b_3 \Rightarrow a_1 = a_3$ *et* $b_1 \leqslant b_3 \Rightarrow z_1 \preceq z_3$. *La relation est bien transitive.* **[2]**
2. *C'est une relation d'ordre total. Soient* $z_1 = a_1 + ib_1$ *et* $z_2 = a_2 + ib_2$.
   Si $a_1 < a_2$ *alors* $z_1 \preceq z_2$.
   Si $a_1 = a_2$ *alors soit* $b_1 \leqslant b_2 \Rightarrow z_1 \preceq z_2$ *soit* $b_1 > b_2 \Rightarrow z_2 \preceq z_1$.
   Si $a_1 > a_2$ *alors* $z_2 \preceq z_1$.
   Dans tous les cas on arrive toujours à comparer z_1 *et* z_2. **[1,5]**
3. *La relation est compatible avec l'addition. En effet soient* $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ *et* $z_3 = a_3 + ib_3$ *tels que* $z_1 \preceq z_2$. *On a donc* $a_1 < a_2$ *ou* ($a_1 = a_2$ *et* $b_1 \leqslant b_2$). *La relation d'ordre sur* $\mathbb{R}$ *étant compatible avec l'addition on a* $a_1 < a_2$ *ou* ($a_1 = a_2$ *et* $b_1 \leqslant b_2$) $\Leftrightarrow$ $a_1 + a_3 < a_2 + a_3$ *ou* ($a_1 + a_3 = a_2 + a_3$ *et* $b_1 + b_3 \leqslant b_2 + b_3$) $\Leftrightarrow z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3$. **[1,5]**
4. $0 = 0 + i0$ *et* $i = 0 + i$ *donc* $0 \preceq i$ *(car* $0 \leqslant 1$*). Par contre* $0 \times i = 0$ *et* $i \times i = i^2 = -1$ *donc* $i^2 \preceq 0$. *La relation d'ordre n'est donc pas compatible avec la multiplication puisque l'inégalité change de sens alors qu'on multiplie par un nombre "positif".* **[1]**