MÉDIAN

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 (7 points)

Les questions **1** et **2** sont indépendantes.

1. **a.** Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + X$.

b. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $F(X) = \dfrac{1}{(X^4+X)^2}$ (on **ne demande pas** de calculer les coefficients).

2. Soit $G = \dfrac{P}{Q}$ avec $P(X) = X^5 - 9X^3 + 12X^2 - 19X + 25$ et $Q(X) = (X^2+1)(X-2)^2$

a. Montrer que G est irréductible (on pourra regarder les racines de Q).

b. Déterminer la partie entière de G.

c. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, $H(X) = \dfrac{2X^3 - 4X^2 - 7X + 9}{(X-2)^2(X^2+1)}$.

Exercice 2 (7 points)

Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & (\bar{x}, \bar{x}) \end{array}$$

1. Déterminer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$. Généraliser.

2. L'application ci-dessus est-elle injective ? Surjective ?

3. Déterminer $G = f^{-1}((\bar{0}, \bar{0}))$. Démontrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

4. Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation $a \sim b \iff a - b \in G$.
Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.

5. Déduire de ce qui précède que l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \bar{x} & \longmapsto & (\bar{x}, \bar{x}) \end{array}$$

est **bien définie** et **bijective**.

6. Pourrait-on **de la même façon** construire une application **bijective** de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

TOURNEZ LA PAGE SVP

Exercice 3 (9 points)

Cet exercice comporte une question de cours (question **4.a***). Même si vous ne savez pas y répondre, le résultat démontré dans cette question peut être utilisé dans la suite de l'exercice.*

1. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Soit P un polynôme de degré 2, $P(X) = a + bX + cX^2$. Montrer que P vérifie $P(2) = 4$, $P(3) = 5$, $P(4) = 6$ si et seulement

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + 2b + 4c & = & 4 \\ a + 3b + 9c & = & 5 \\ a + 4b + 16c & = & 6 \end{array} \right.$$

3. Montrer, sans calculs, que ce système admet une solution unique.

4. On souhaite maintenant génealiser le résultat de la question **1** en montrant que toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ est inversible :

a. *Une question de cours* :

i. Soit P un polynôme de degré n et a une racine, démontrer que $P(a) = 0 \Rightarrow (X - a) \mid P$ (indication : on écrira la division euclidienne de P par $X - a$ et on calculera le reste de cette division).

ii. Montrer que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n racines distinctes de P, alors

$$P(X) = (X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n) S(X)$$

où S est un polynôme.

iii. En déduire qu'un polynôme de degré n a au plus n racines.

b. On considère α, β, γ trois réels tels que $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma$ et $\beta \neq \gamma$. Soient P et Q deux polynômes de degré 2 tels que $\left\{ \begin{array}{rcl} P(\alpha) & = & Q(\alpha) \\ P(\beta) & = & Q(\beta) \\ P(\gamma) & = & Q(\gamma) \end{array} \right.$. Montrer que α, β, γ sont des racines du polynôme $P - Q$.

c. En déduire que $P - Q = 0$ et conclure qu'il existe un unique polynôme de degré 2 tel que $P(\alpha) = y_0, P(\beta) = y_1, P(\gamma) = y_2$ avec y_0, y_1, y_2 trois réels quelconques.

d. Sans faire de calculs déduire des questions précédentes que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ est inversible.