Médian MT11, Printemps 2008

Exercice 1

1. $L.M = M.L = 0$.

2. $L^2 = 3L$, $M^2 = 3M$. *On en déduit par récurrence que pour* $n \geqslant 2, L^n = 3^{n-1}L$. *On montre de même que* $M^n = 3^{n-1}M$ *pour* $n \geqslant 2$.

3. *Comme* L *et* M *commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :* $A^n = (L-M)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L^k \times (-M)^{n-k}$. *Or d'après la question 1., le produit* $L.M$ *est nul. Ainsi, les produits de puissances strictements positives de* L *et* M *sont nuls. Donc* $A^n = L^n + (-1)^n M^n = 3^{n-1}L - (-3)^{n-1}M$. *Cette formule est valable pour* $n \geqslant 2$, *et on voit qu'elle est aussi vérifiée pour* $n = 1$.

4.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k = I + \sum_{k=1}^{n-1} \left(3^{k-1}L - (-3)^{k-1}M\right) \\ &= I + \sum_{k=0}^{n-2} \left(3^k L - (-3)^k M\right) \\ &= I + \frac{3^{n-1}-1}{2} L - \frac{1-(-3)^{n-1}}{4} M. \end{aligned}$$

5. **a.** $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. *On applique la méthode de Gauss, on trouve que* S *est bien inversible, et que* $S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. *Comme* I *et* A *commutent, on a* $(I-A)(I + A + \cdots + A^{n-1}) = I - A^n$. *On vient de voir que* $S = I - A$ *est inversible, d'où* $S_n = I + A + \cdots + A^{n-1} = S^{-1}(I - A^n)$.

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} z &= e^{i\alpha} + e^{i\beta} \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}. \end{aligned}$$

2. *On en déduit la forme trigonométrique de* z : $|z| = 2\left|\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right|$,

et lorsque $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \neq 0$, $\arg(z) = \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2}\ [2\pi] & \textit{si } \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) > 0 \\ \pi + \frac{\alpha+\beta}{2}\ [2\pi] & \textit{si } \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) < 0. \end{cases}$

Attention : si $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) < 0$, $2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ *n'est pas la forme trigonométrique de* z *!*

3. *On calcule* z^n *par la formule du binôme de Newton :*

$$z^n = \left(e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\alpha} e^{i(n-k)\beta}.$$

D'autre part, en utilisant la forme obtenue en 1. : $z^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{in\frac{\alpha+\beta}{2}}$. *D'où, en identifiant les parties réelles :*

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \cos\big(k\alpha + (n-k)\beta\big) = 2^n \times \cos^n \frac{\alpha-\beta}{2} \times \cos\left(n\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Exercice 3

Partie A

1. $[a,b] = ab - ba = 0_A$ *si* a *et* b *commutent.*

2. **a.** $[a,b] = ab - ba = -(ba - ab) = -[b,a]$.

b. $[a, b+c] = a(b+c) - (b+c)a = ab + ac - ba - ca = [a,b] + [a,c]$.

3. **a.** *Il suffit de montrer que* d_a *vérifie les deux relations.*

- $d_a(x+y) = [a, x+y] = [a,x] + [a,y] = d_a(x) + d_a(y)$ *(d'après la question 2.b.).*
- $d_a(xy) = [a, xy] = axy - xya = axy \underbrace{-xay + xay}_{=0} - xya = (ax - xa)y + x(ay - ya) = [a,x]y + x[a,y] = xd_a(y) + d_a(x)y$.

b. $d_a(b) = [a,b] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie B

1. $\delta(0_A) = \delta(0_A + 0_A) = \delta(0_A) + \delta(0_A)$ *d'après la relation (1). Et donc,* $\delta(0_A) = 0_A$.
$\delta(1_A) = \delta(1_A \times 1_A) = 1_A\delta(1_A) + \delta(1_A)1_A$ *d'après la relation (2). Et donc,* $\delta(1_A) = 0_A$.

2. **a.** *Soit* $x \in A$, $\delta(0_A) = \delta(x - x) = \delta(x) + \delta(-x) = 0_A$ *d'après la question précédente. Et donc,* $\delta(-x) = -\delta(x)$.

b. *Soit* $x \in \mathbb{A}^\times$, $\delta(1_A) = \delta(xx^{-1}) = x\delta(x^{-1}) + \delta(x)x^{-1} = 0_A$ *d'après 1.*
Ainsi, $\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1}$.

3. **a.** *Soient* $x, y, z \in A$ *:*

$$\begin{aligned} \delta(xyz) &= x\delta(yz) + \delta(x).yz \\ &= x.\big(y\delta(z) + \delta(y)z\big) + \delta(x).yz \\ &= xy\delta(z) + x\delta(y)z + \delta(x)yz. \end{aligned}$$

b. $\delta(x^3) = \delta(xxx) = x^2\delta(x) + x\delta(x)x + \delta(x)x^2$. *Lorsque* x *et* $\delta(x)$ *commutent, on obtient* $\delta(x^3) = 3x^2\delta(x)$.

4. **a.**
- $C_\delta \neq \emptyset$ *(on sait déjà que* $0_A, 1_A \in C_\delta$*).*
- *Soient* $x, y \in C_\delta$ *:* $\delta(x-y) = \delta(x) - \delta(y)$ *d'après 2.a., et donc* $\delta(x-y) = 0_A - 0_A = 0_A$ *:* C_δ *est un sous-groupe de* $(A, +)$.
- *Soient* $x, y \in C_\delta$ *:* $\delta(x \times y) = x\delta(y) + \delta(x)y = x \times 0_A + 0_A \times y = 0_A$, *et donc* C_δ *est bien un sous-anneau de* $(A, +, \times)$.

b. *Il suffit de montrer que* $C_\delta^\times = C_\delta \backslash \{0_A\}$ *(ou que* $C_\delta \backslash \{0_A\}$ *est stable par l'inverse).*
Soit alors $x \in C_\delta \backslash \{0_A\}$ *:* x *est inversible dans* A*, donc on peut appliquer la question 2.b. :* $\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1} = 0_A$, *donc* $x^{-1} \in C_\delta$ *:* C_δ *a bien une structure de corps.*