Médian MT11, Printemps 2008

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie. Le barème, donné à titre indicatif, est susceptible de modification. Les calculatrices sont interdites, aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 Calcul matriciel (7 points)

Dans tout l'exercice, I désigne I_3 la matrice identité, et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit aussi : $S_0 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, et pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

1. Calculer $L \times M$ et $M \times L$.

2. Calculer L^2 et M^2. En déduire que $L^n = 3^{n-1}L$ et $M^n = 3^{n-1}M$ pour tout $n \geqslant 2$.

3. En remarquant que $A = L - M$, démontrer que pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = 3^{n-1}L - (-3)^{n-1}M.$$

4. Exprimer S_n en fonction de I, L, M et n.

5. On pose $S = I - A$.

a. Démontrer que S est inversible, et calculer S^{-1}.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $S_n = S^{-1} \times \big(I - A^n\big)$.

Exercice 2 Nombres complexes (4 points)

Soient α et β deux nombres réels, et $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ un nombre complexe.

1. Montrer que $z = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

2. Mettre z sous forme trigonométrique.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant z^n de deux manières différentes, trouver la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \cos\big(k\alpha + (n-k)\beta\big).$$

Exercice 3 Dérivation dans un anneau (9 points)

Les parties A et B sont totalement indépendantes.
Soient $(A, +, \times)$ un anneau (qui n'est pas à priori supposé commutatif). On note 0_A et 1_A les éléments neutres additif et multiplicatif de A. Une application $\delta : A \to A$ est appelée dérivation sur A lorsque pour tout $x, y \in A$, on a les relations :

$$\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) \tag{1}$$
$$\delta(x \times y) = x \times \delta(y) + \delta(x) \times y \tag{2}$$

Partie A : Crochet de Lie

Pour $a, b \in A$, on pose $[a, b] = a \times b - b \times a$.

1. Que vaut $[a, b]$ lorsque a et b commutent ?

2. On revient au cas général, et on se donne a, b, c dans A.

- **a.** Former une relation liant $[a, b]$ et $[b, a]$.
- **b.** Montrer que $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$.

3.

- **a.** Pour $a \in A$, on considère $d_a : A \to A$ l'application définie par $d_a(x) = [a, x]$. Montrer que d_a est une dérivation sur A.
- **b.** Dans cette question, on se place dans l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  Soient $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $d_a(b)$.

Partie B : Propriétés des dérivations

Soit δ une dérivation quelconque sur A.

1. En utilisant les relations (1) et (2), calculer $\delta(0_A)$ et $\delta(1_A)$.

2. Soit $x \in A$.

- **a.** Exprimer $\delta(-x)$ en fonction de $\delta(x)$.
- **b.** On suppose que x est inversible. Exprimer $\delta(x^{-1})$ en fonction de $\delta(x)$ et de x^{-1}.

3.

- **a.** Soient $x, y, z \in A$, calculer $\delta(xyz)$ en fonction de $x, y, z, \delta(x), \delta(y)$, et $\delta(z)$.
- **b.** Soiet $x \in A$. Calculer $\delta(x^3)$. Que devient cette formule lorsque x et $\delta(x)$ commutent ?

4. Soit $C_\delta = \{x \in A, \delta(x) = 0_A\}$.

- **a.** Montrer que C_δ est un sous-anneau de $(A, +, \times)$.
  Rappel : Pour montrer qu'un ensemble est un sous-anneau, il faut et il suffit de montrer que c'est un sous-groupe, et qu'il est stable par la multiplication.
- **b.** Montrer que si $(A, +, \times)$ est un corps, alors C_δ est un sous-corps de A.