Mathématiques

Tronc commun

Médian - Automne 2010

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice ou d'un téléphone est interdite. Une feuille de notes est autorisée.
Les deux exercices sont à rédiger sur des copies différentes.

Exercice 1 (7 points) Pour tout nombre réel x, on définit la matrice $M(x) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Que peut-on dire de la matrice $M(0)$?
2. Vérifier la relation $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad M(x)M(y) = M(x+y)$
3. En déduire que pour tout réel x et pour tout entier naturel n,
$$(M(x))^n = M(nx).$$
4. Montrer que la matrice $M(x)$ est inversible. Quel est son inverse ?
5. Justifier que l'application $M : x \longmapsto M(x)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, est injective. Cette application est-elle bijective ?
6. On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices $M(x)$ où x décrit $\mathbb{R}$.
   (a) Prouver que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe du groupe linéaire $GL_3(\mathbb{R})$.
   (b) $\mathcal{H}$ est-il un sous-groupe de $(\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}), +)$? Pourquoi ?
7. Dans cette question, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Donner l'expression de A^n sous la forme d'un tableau matriciel pour $n \in \mathbb{N}$.

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 (9 points)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par :

$$P(X) = (1+X)^n - X^n.$$

1. Quel est le degré de P ? Donner son coefficient dominant.
2. Démontrer que si z est une racine de P alors $\mathfrak{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$
3. (a) Démontrer que, pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^{ix} - 1 = 2\,i\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{e}^{i\,\frac{x}{2}}.$$

   (b) Déterminer les racines de P. On les exprimera en fonction des racines n-ièmes de l'unité.

   (c) Écrire chaque racine de P sous forme exponentielle. En déduire le module, et un argument de chacune de ces racines.
4. On note $z_1\,,\, z_2\,,\, \ldots\,,\, z_{n-1}$ les racines du polynôme P. Calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z_k}.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant suivant les valeurs de l'entier $n \geqslant 2$, l'équation d'inconnue x :

$$(1+x)^n = x^n.$$

Corrigé

Exercice 1

1. $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ est la matrice identité carrée d'ordre 3.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculons le produit :

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y^2 & 1 & y \\ -2y & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 - y^2 - 2xy & 1 & y + x \\ -2x - 2y & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(x+y)^2 & 1 & x + y \\ -2(x+y) & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M(x+y) \end{aligned}$$

3. Soit x un réel fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ l'égalité : « $[M(x)]^n = M(nx)$ »

   - Vérifions $\mathcal{P}_0$:
     $[M(x)]^0 = I_3$ par convention et $M(0 \times x) = M(0) = I_3$ d'après la première question.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie. Démontrons alors, sous cette hypothèse, que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
     $$\begin{aligned} [M(x)]^{k+1} &= M(x) \times M(x)^k & \\ &= M(x) \times M(kx) & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= M(x + kx) & \text{d'après la relation vue en 2. avec } y = kx \\ &= M((k+1)x) & \text{ce qui est l'égalité au rang } k+1. \end{aligned}$$
   - <u>Conclusion</u> : selon le principe de récurrence, l'égalité $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

4. En prenant $y = -x$ dans la relation établie en 2., on obtient :

$$M(x) \times M(-x) = M(x - x) = M(0) = I_3$$

   où $M(-x)$ est une matrice de même taille que $M(x)$. Par conséquent la matrice $M(x)$ est inversible et $\boxed{[M(x)]^{-1} = M(-x)}$

5. • Soit x et y deux réels tels que $M(x) = M(y)$.
   Alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & \boxed{x} \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y^2 & 1 & \boxed{y} \\ -2y & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   On en déduit que $x = y$. Donc l'application $M : x \longmapsto M(x)$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) \neq \mathrm{O}_3$
La matrice nulle $\mathrm{O}_3 \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ ne peut pas s'écrire sous la forme $M(x)$ avec x réel. Donc l'application M n'est pas surjective, ni bijective.

6. $\mathcal{H} = \{M(x) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})\ /\ x \in \mathbb{R}\}$

   (a) [(i)]
   Toute matrice de $\mathcal{H}$ est inversible d'après la question 4.
   Donc $\mathcal{H} \subset GL_3(\mathbb{R})$.

   ii. $\mathcal{H}$ contient la matrice identité I_3 qui est l'élément neutre du groupe $(GL_3(\mathbb{R})\,,\,\times)$

   iii. Soit $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de $\mathcal{H}$.
   Alors $M(x) \times M(y) = M(x+y)$ avec $x + y\ \in \mathbb{R}$.
   Donc $M(x) \times M(y) \in \mathcal{H}$.
   $\mathcal{H}$ est stable pour la multiplication matricielle.

   iv. Soit $M(x)$ un élément de $\mathcal{H}$.
   Alors $[M(x)]^{-1} = M(-x)$ avec $-x \in \mathbb{R}$. Donc $[M(x)]^{-1} \in \mathcal{H}$.
   $\mathcal{H}$ est stable par passage à l'inverse.

   Ainsi $\mathcal{H}$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(GL_3(\mathbb{R})\,,\,\times)$.

   (b) $\mathcal{H}$ n'est pas un sous-groupe de $(\,\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})\,,\,+\,)$ car $\mathcal{H}$ ne contient pas la matrice nulle O_3 qui est l'élément neutre du groupe $(\,\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})\,,\,+\,)$.

7. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(-2)$$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = [M(-2)]^n \overset{\text{d'après 3.}}{=} M(-2n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4n^2 & 1 & -2n \\ 4n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1. $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k$, donc $\deg P = n-1$, et son coefficient dominant est $\displaystyle\binom{n}{n-1} = n$.

2. Soit z une racine de $P(X)$: $(1+z)^n = z^n$, en prenant le conjugué de cette équation, on obtient $(1+\overline{z})^n = \overline{z}^n$. En multipliant ces deux égalités, on obtient

$$\begin{array}{rcl} (1+z)^n \times (1+\overline{z})^n & = & z^n \times \overline{z}^n \\ \big((1+z) \times (1+\overline{z})\big)^n & = & (z \times \overline{z})^n \\ (1 + 2\Re e(z) + |z|^2)^n & = & (|z|^2)^n \end{array}$$

   Ce qui est une égalité dans $\mathbb{R}$, et donc $\Re e(z) = -\dfrac{1}{2}$.

3. (a)

$$\begin{array}{rcl} e^{ix} - 1 & = & e^{ix/2} \times (e^{ix/2} - e^{-ix/2}) \\ & = & e^{ix/2} \times (2i\sin(x/2)) \end{array}$$

(b) Soit z une racine de $P(X)$:

$$\begin{aligned} (1+z)^n &= z^n \\ \left(\frac{1+z}{z}\right)^n &= 1 \ (z=0 \text{ n'est pas solution}) \\ \left(1+\frac{1}{z}\right)^n &= 1 \end{aligned}$$

Ce qui montre que $1+\frac{1}{z}$ est une racine n-ième de l'unité différente de 1. Soit ω_k une telle racine : $1+\frac{1}{z}=\omega_k$, ce qui donne

$$z=\frac{1}{\omega_k-1}.$$

(c) On vérifie facilement que les racines n-ième de l'unité différente de 1 s'écrivent $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ où k varie de 1 à $n-1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\omega_k-1} \\ &= \frac{1}{e^{2ik\pi/n}-1} \\ &= \frac{1}{2i\sin(k\pi/n)e^{ik\pi/n}} \\ &= \frac{-i}{2\sin(k\pi/n)}e^{-ik\pi/n} \\ &= \frac{1}{2\sin(k\pi/n)}e^{i(3\pi/2-k\pi/n)}. \end{aligned}$$

Ainsi le module des racines est $\frac{1}{2\sin(k\pi/n)}$, et leurs arguments modulo (2π) sont $3\pi/2-k\pi/n$ pour k variant de 1 à $n-1$.

4. D'après **3.(b)**, $z_k=\frac{1}{\omega_k-1}$, donc $\frac{1}{z_k}=\omega_k-1$ où ω_k est une racine n-ième de l'untité différente de 1. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{z_k} &= \sum_{k=1}^{n-1}(\omega_k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\omega_k-(n-1) : \text{ on reconnaît la somme des racines } n\text{-ièmes de l'unité} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k-1-(n-1) \text{ où } \omega_0=1 \\ &= -n \ \text{ (on sait d'après le cours que cette somme est nulle).} \end{aligned}$$

5. Les racines réelles de l'équation $(1+x)^n=x^n$ sont les racines du polynôme $P(X)$ qui sont à valeurs réelles (celles dont l'argument est égal à $\pm\pi$ modulo (2π)). D'après **3.(c)**, il faut que n soit pair, et que k soit égal à $n/2$, on obtient donc une seule solution qui est

$$x=-\frac{1}{2}.$$