

**Informations importantes**

- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Le barème donné est susceptible d'être modifié.
- Les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.
- La présentation, la qualité de la rédaction et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note.

**Exercice 1 - Suites et sommes** ..... (12 points)

1. (a) Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Expliciter, à l'aide d'un télescopage, la somme  $\sum_{k=1}^N (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ .
- (b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Écrire  $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$  sous forme d'une fraction de type  $\frac{1}{A(k)}$  où l'expression  $A(k)$  est à déterminer.
- (c) En déduire que :
- $$(\star) \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

**Ce résultat pourra servir dans les questions 2 et 3.**

2. On pose pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

- (a) En utilisant la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2.$$

- (b) En remarquant que  $S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  et en utilisant la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

- (c) En déduire un encadrement de  $\frac{S_n}{2\sqrt{n}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (d) Déduire de cet encadrement une suite équivalente à  $(S_n)_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3. On pose alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$w_n = S_n - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad u_n = w_n - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- (a) Démontrer que les suites  $(u_n)_n$  et  $(w_n)_n$  sont adjacentes.

- (b) En déduire qu'il existe une constante réelle  $\ell$  et une suite  $(\varepsilon_n)_n$  telles que

$$S_n = 2\sqrt{n} + \ell + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

## Rédiger sur une nouvelle copie les exercices 2 et 3

### Exercice 2 - Ensembles .....(4 points)

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois ensembles.

1. L'assertion  $C \subset (A \cup B) \implies (C \subset A \text{ ou } C \subset B)$  est-elle vraie? Justifier.
2. Démontrer l'implication :  $A \cup B = B \cap C \implies A \subset B \subset C$ .

### Exercice 3 - Inéquations - Applications .....(4 points)

#### Sujet 1

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $(E) : |2 - x^2| \leq 1$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  . Déterminer l'image réciproque  $f^{-1}(\{2; 3\})$  de l'ensemble  $\{2; 3\}$  par  $f$ .  
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

#### Sujet 2

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $(E) : |3 - x^2| \leq 2$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  . Déterminer l'image réciproque  $f^{-1}(\{1; 2\})$  de l'ensemble  $\{1; 2\}$  par  $f$ .  
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

#### Sujet 3

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $(E) : |3 - x^2| \leq 1$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  . Déterminer l'image réciproque  $f^{-1}(\{0; 1\})$  de l'ensemble  $\{0; 1\}$  par  $f$ .  
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$