Final MTB - Automne 2020
Durée : 1h30

Recommandations. *L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.*

Exercice 1. Calculez l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(x))^{2021} \sin(x)\, \mathrm{d}x$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E.
Répondez à chacune des questions ci-dessous, en justifiant votre réponse :

- si votre réponse est "oui", justifiez votre affirmation en donnant un exemple de famille qui convient (exprimez cette famille en fonction des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$),
- si votre réponse est "non", justifiez votre affirmation en citant les résultats du cours que vous utilisez.

1. Existe-t-il une famille de 4 vecteurs, liée et génératrice de E ?
2. Existe-t-il une famille de 3 vecteurs, liée et génératrice de E ?
3. Existe-t-il une famille de 2 vecteurs, libre et génératrice de E ?
4. Existe-t-il une famille de 2 vecteurs, liée ?

Exercice 3.

1. Déterminez le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Démontrez alors que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :
$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \qquad \text{où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction arcsin. Déterminez l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 à $\mathscr{C}$ ainsi que la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T au voisinage de 0.

Exercice 4. Soit $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$.

1. Démontrez que f est linéaire.
2. (a) Calculez $f(1)$, $f(X)$, $f\left(X^2\right)$, $f\left(X^3\right)$.
   (b) Déterminez une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. (a) Rappelez la définition de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Déduisez des questions précédentes la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
4. (a) Calculez $f(X - X^3)$.
   (b) En utilisant les questions précédentes, déterminez une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Déterminez la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ de l'application linéaire f relativement aux bases canoniques $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

Correction

Exercice 1. Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(x))^{2021} \sin(x)\ \mathrm{d}x$. On remarque que :

$$I = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(x))^{2021} \cos'(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} u'(x)\,(u(x))^n\ \ \mathrm{d}x,$$

où $u = \cos$ et $n = 2021$. D'où :

$$\begin{aligned}
\boxed{I} &= -\left[\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\left[\frac{(\cos(x))^{2022}}{2022}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{2022}}{2022} + \frac{(\cos(0))^{2022}}{2022} \\
&= -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2022}}{2022} + \frac{1^{2022}}{2022} \\
&= \boxed{\frac{1}{2022}\left(1 - \frac{1}{2^{2022}}\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ une base de E.

1. Oui, il existe une famille de 4 vecteurs, liée et génératrice de E. Par exemple, la famille $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e}_3\right)$ est liée et génératrice de E. (*Elle est liée par construction et elle est génératrice de E car elle contient la base $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ qui est une famille génératrice de E*).

2. Non, il n'existe pas de famille de 3 vecteurs, liée et génératrice de E. En effet, dans un espace vectoriel $\mathscr{E}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, une famille génératrice de $\mathscr{E}$ formée de n vecteurs est une base de $\mathscr{E}$, donc est nécessairement une famille libre. La famille $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ est une base de E. Elle est formée de 3 vecteurs, donc $\dim(E) = 3$. Par conséquent, si une famille de 3 est génératrice de E, alors elle est libre, donc elle ne peut pas être liée.

3. Non, il n'existe pas de famille de 2 vecteurs, libre et génératrice de E. En effet, une famille libre et génératrice de E est une base de E. Dans un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les bases sont formées de n vecteurs. Donc puisque $\dim(E) = 3$, toute famille libre et génératrice de E est formée d'exactement 3 vecteurs.

4. Oui, il existe une famille de 2 vecteurs de E, liée. Par exemple, la famille $\left(\vec{e}_1, -\vec{e}_1\right)$ est une famille liée formée de 2 vecteurs de E.

Exercice 3. 1. Soit x au voisinage de 0.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}} = (1+u)^{\alpha},$$

où $u = -x^2$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$.
1ère méthode. Puisque u est au voisinage de 0, on a :

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + u\ \varepsilon_1(u) = 1 - \frac{1}{2}u + u\ \varepsilon_1(u),$$

où $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 - \frac{1}{2}\left(-x^2\right) + \left(-x^2\right)\ \varepsilon_1\left(-x^2\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^2\ \left(-\varepsilon_1\left(-x^2\right)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^2\ \varepsilon_2(x),
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_2(x) = -\varepsilon_1\left(-x^2\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est alors donné par :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^2\ \varepsilon_2(x)}.$$

Deuxième méthode. Puisque u est au voisinage de 0, on a :

$$(1+u)^\alpha = 1+\alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + u^2\ \varepsilon_0(u) = 1-\frac{1}{2}u+\frac{3}{8}u^2+u^2\ \varepsilon_0(u),$$

où $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon_0(u)=0$. Or,

$$\begin{cases} u=-x^2 \\ u^2=\left(-x^2\right)\times\left(-x^2\right)=0+x^2\varepsilon_1(x), \quad \text{où } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0. \end{cases}$$

Ainsi, par composition de développements limités, le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} &= 1-\frac{1}{2}\left(-x^2\right)+x^2\ \varepsilon_2(x) \\ &\boxed{= 1+\frac{1}{2}x^2+x^2\ \varepsilon_2(x)}, \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$.

2. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in]-1,1[$:

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc d'après la question précédente, $\arcsin'$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par :

$$\arcsin'(x)=1+\frac{1}{2}x^2+x^2\ \varepsilon_2(x), \quad \text{où } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0.$$

En intégrant ce développement limité, on obtient le développement limité de $\arcsin$:

$$\arcsin(x)-\arcsin(0)=x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+x^3\ \varepsilon(x), \quad \text{où } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

Or, $\arcsin(0)$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est égal à 0. Puisque $\sin(0)=0$, on a : $\arcsin(0)=0$. Ainsi, le $DL_3(0)$ de arcsin est :

$$\boxed{\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+x^3\ \varepsilon(x)}.$$

3. On déduit de ce développement limité que l'équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de arcsin au point d'abscisse 0 est :

$$\boxed{y=x}.$$

Soit x au voisinage de 0. On a de plus,

$$\arcsin(x)-x=\frac{x^3}{6}+x^3\ \varepsilon(x).$$

Le monôme $\frac{x^3}{6}$ change de signe en 0.

Donc $\boxed{\text{au point d'abscisse } 0 \text{ la courbe } \mathscr{C} \text{ traverse la tangente } T}$: 0 est un point d'inflexion.

- Si $x<0$ alors $\frac{x^3}{6}<0$ donc $\arcsin(x)-x\le 0$ et $\arcsin(x)\le x$. Ainsi $\boxed{\text{pour } x \text{ au voisinage de } 0^-,\ \mathscr{C} \text{ est située en-dessous de } T}$.
- Si $x>0$ alors $\frac{x^3}{6}>0$ donc $\arcsin(x)-x\ge 0$ et $\arcsin(x)\ge x$. Ainsi $\boxed{\text{pour } x \text{ au voisinage de } 0^+,\ \mathscr{C} \text{ est située au-dessus de } T}$.

Exercice 4. Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1),P(0),P(1)) \end{array}.$

1. f est linéaire si et seulement si :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(P,Q)\in\left(\mathbb{R}_3[X]\right)^2,\ f(\lambda P+Q)=\lambda f(P)+f(Q).$$

Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(P,Q)\in(\mathbb{R}_3[X])^2$.

$$\begin{aligned} f\left(\lambda P+Q\right) &= \Big((\lambda P+Q)(-1)\ ,\ (\lambda P+Q)(0)\ ,\ (\lambda P+Q)(1)\Big) \\ &= \Big(\lambda P(-1)+Q(-1)\ ,\ \lambda P(0)+Q(0)\ ,\ \lambda P(1)+Q(1)\Big) \\ &= \Big(\lambda P(-1)\ ,\ \lambda P(0)\ ,\ \lambda P(1)\Big)+\Big(Q(-1)\ ,\ Q(0)\ ,\ Q(1)\Big) \\ &= \lambda\Big(P(-1)\ ,\ P(0)\ ,\ P(1)\Big)+f(Q) \\ &= \lambda f(P)+f(Q). \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

2. (a) Par définition de f :
   - $f(1) = f(P_1) = (P_1(-1), P_1(0), P_1(1))$ avec $P_1(X) = 1$, donc :
   $$\boxed{f(1) = (1,1,1)}.$$
   - $f(X) = f(P_2) = (P_2(-1), P_2(0), P_2(1))$ avec $P_2(X) = X$, donc :
   $$\boxed{f(X) = (-1,0,1)}.$$
   - $f\left(X^2\right) = f(P_3) = (P_3(-1), P_3(0), P_3(1))$ avec $P_3(X) = X^2$, donc :
   $$\boxed{f(X) = (1,0,1)}.$$
   - $f\left(X^3\right) = f(P_4) = (P_4(-1), P_4(0), P_4(1))$ avec $P_4(X) = X^3$, donc :
   $$\boxed{f(X) = (-1,0,1)}.$$

   (b) La famille $\left(1, X, X^2, X^3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$). Donc :
   $$\text{Im}(f) = \text{Vect}\big(f(1), f(X), f\left(X^2\right), f\left(X^3\right).$$
   D'après la question précédente,
   $$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Vect}\big((1,1,1), \underline{(-1,0,1)}, (1,0,1), \underline{(-1,0,1)}\big)\\ &= \text{Vect}\big((1,1,1), (-1,0,1), (1,0,1)\big).\end{aligned}$$
   Pour déterminer une base de $\text{Im}(f)$, on applique l'algorithme du pivot de Gauss sur la matrice :
   $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$
   $$M \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   On obtient une matrice échelonnée formée de 3 colonnes non nulles. On en déduit que $\boxed{\text{la famille } \big((1,1,1), (0,1,2), (0,0,2)\big) \text{ est une base de } \text{Im}(f)}$ et $\boxed{\dim\left(\text{Im}(f)\right) = 3}$.

   Remarque : la famille $\mathscr{F} = \big((1,1,1), (-1,0,1), (1,0,1)\big)$ est également une base de $\text{Im}(f)$ puisqu'elle est génératrice de $\text{Im}(f)$ et qu'elle est libre (car $\text{Card}(\mathscr{F}) = \text{rang}(\mathscr{F})$).

3. (a) Par définition : $\boxed{\text{Ker}(f) = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}}$.

   (b) D'après le théorème du rang appliqué à l'application linéaire f :
   $$\dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right) = \dim\left(\text{Ker}(f)\right) + \dim\left(\text{Im}(f)\right).$$
   Or $\dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right) = 4$ et d'après la question 2(b), $\dim\left(\text{Im}(f)\right) = 3$. Par conséquent,
   $$\boxed{\dim\left(\text{Ker}(f)\right)} = \dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right) - \dim\left(\text{Im}(f)\right) = 4 - 3 \boxed{= 1}.$$

4. (a) f est linéaire donc $f(X - X^3) = f(X) - f(X^3)$. D'après la question 2(a), $f(X) = f(X^3) = (-1,0,1)$. Donc,
   $$\boxed{f(X - X^3) = 0_{\mathbb{R}^3}}.$$

   (b) Puisque $f(X - X^3) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $X - X^3 \in \text{Ker}(f)$. D'après la question 3(a), $\dim\left(\text{Ker}(f)\right) = 1$.
   On en déduit que $\boxed{\text{la famille } \left(X - X^3\right) \text{ est une base de } \text{Ker}(f)}$.

5. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$: $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$. On note également $\mathscr{C} = \left(e_1, e_2, e_3\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ définie par :
   $$e_1 = (1,0,0), \quad e_2(0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1).$$
   Par définition, la matrice de l'application linéaire f relativement aux bases$\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{C}$ est donnée par :
   $$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \Big(\left(f(1)\right)_{\mathscr{C}} \Big| \left(f(X)\right)_{\mathscr{C}} \Big| \left(f(X^2)\right)_{\mathscr{C}} \Big| \left(f(X^3)\right)_{\mathscr{C}}\Big).$$
   D'après la question 2(a), on en déduit que :
   $$\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$