

---

**Recommandations.** L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la rigueur de raisonnement comptent pour une part importante dans la note. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

---

**Exercice 1.** Calculez l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(x))^{2021} \sin(x) dx$ .

---

**Exercice 2.** Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base de  $E$ . Répondez à chacune des questions ci-dessous, en justifiant votre réponse :

- si votre réponse est "oui", justifiez votre affirmation en donnant un exemple de famille qui convient (exprimez cette famille en fonction des vecteurs  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ ),
  - si votre réponse est "non", justifiez votre affirmation en citant les résultats du cours que vous utilisez.
1. Existe-t-il une famille de 4 vecteurs, liée et génératrice de  $E$ ?
  2. Existe-t-il une famille de 3 vecteurs, liée et génératrice de  $E$ ?
  3. Existe-t-il une famille de 2 vecteurs, libre et génératrice de  $E$ ?
  4. Existe-t-il une famille de 2 vecteurs, liée?
- 

**Exercice 3.**

1. Déterminez le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
2. Démontrez alors que la fonction  $x \mapsto \arcsin(x)$  admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{où } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3. On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentant la fonction arcsin. Déterminez l'équation de la tangente  $T$  au point d'abscisse 0 à  $\mathcal{C}$  ainsi que la position relative de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $T$  au voisinage de 0.
- 

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)).$

1. Démontrez que  $f$  est linéaire.
2. (a) Calculez  $f(1)$ ,  $f(X)$ ,  $f(X^2)$ ,  $f(X^3)$ .  
(b) Déterminez une base de  $\text{Im}(f)$ .
3. (a) Rappelez la définition de  $\text{Ker}(f)$ .  
(b) Déduisez des questions précédentes la dimension de  $\text{Ker}(f)$ .
4. (a) Calculez  $f(X - X^3)$ .  
(b) En utilisant les questions précédentes, déterminez une base de  $\text{Ker}(f)$ .
5. Déterminez la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  de l'application linéaire  $f$  relativement aux bases canoniques  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  et  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$ .