Final MTB

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de la calculatrice est interdite. Aucun document n'est autorisé. Les exercices 1, 2 et 3 seront rédigés sur trois copies différentes.

Exercice 1 : Intégrales et développements limités (6 points)

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$.
2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{1+x}$.
   (a) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de g.
   (b) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction
   $$h : t \mapsto \int_0^t \frac{1-\cos x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
3. Déterminer $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ à l'aide du changement de variables $u = \sqrt{t^2-1}$.

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 : Applications linéaires (10 points)

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.

Partie A - Questions de cours

1. Soient E un espace-vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E. Donner la définition de « F est un sous-espace vectoriel de E ».
2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Donner la définition de « f est une application linéaire de E dans F ».

Partie B - Étude d'une application linéaire

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On pose :
   $$e_1' = (1,-1,0), \quad e_2' = (0,1,-1), \quad e_3' = (1,0,-2).$$
   (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

2. Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$f(e'_1) = 1 - X + X^2, \quad f(e'_2) = 1 - 2X^2 + X^3, \quad f(e'_3) = -X + 3X^2 - X^3.$$

   (a) On note $\mathscr{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice A de f relativement aux bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}$.

   (b) Déterminer le rang de A. L'application linéaire f est-elle surjective ?

   (c) Énoncer le théorème du rang pour l'application linéaire f et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. f est-elle injective ?

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Exprimer le vecteur (a, b, c) dans la base $\mathscr{B}'$.

   (b) En déduire que l'expression de $f(a, b, c)$ est donnée par :

$$f(a, b, c) = (4a + 3b + 2c) - aX - (5a + 6b + 4c)\, X^2 + (3a + 3b + 2c)\, X^3.$$

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Pensez à changer de copie.

Exercice 3 : Fonctions de deux variables (4 points)

On admet dans cet exercice que l'équation d'inconnue x, $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$ admet une solution et une seule α dans $\mathbb{R}^{+*}$, et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U définie par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x - y^2\mathrm{e}^y \end{array} \right.$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble U.
2. Calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières de f en (x, y).
3. Montrer que f admet deux points critiques et deux seulement, dont l'un des deux est $a = (\alpha, -2)$.
4. Est-ce que f admet un extremum local en a ? Si oui, préciser sa nature.