Exercice 1

1.

$$\begin{aligned}\langle g_2 \,|g_1\rangle = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle e_2 - \alpha e_1 \,|e_1\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \langle e_2 \,|e_1\rangle - \alpha \langle e_1 \,|e_1\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \langle e_2 \,|e_1\rangle = \alpha \|e_1\|^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{\langle e_2 \,|g_1\rangle}{\|g_1\|^2}.\end{aligned}$$

2. (a) Soit $(\lambda, P, Q, R) \in \mathbb{R} \times E \times E \times E$.

- *Symétrie.* $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(Q,P)$
- *Linéarité à gauche.*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q, R) &= \int_0^1 (\lambda P + Q)(t)R(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (\lambda P(t)R(t) + Q(t)R(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_0^1 P(t)R(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(t)R(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\varphi(P,R) + \varphi(Q,R).\end{aligned}$$

- *Positivité.*
$\varphi(P,P) = \int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0,$ par positivité de l'intégrale.
- *Caractère défini.* Supposons que $\varphi(P,P) = 0$. Alors $\int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Or la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur le segment $[0,1]$.
Donc, par stricte positivité de l'intégrale, $\forall t \in [0,1], \quad P(t)^2 = 0$
puis $\forall t \in [0,1], \quad P(t) = 0$
Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

(b) D'après la première partie de l'exercice, une base orthogonale de F est obtenue en posant:

$$\begin{cases} g_1 = 1, \\ g_2 = X - \dfrac{\varphi(X,1)}{\varphi(1,1)} \cdot 1 \end{cases}$$

Or $\varphi(X,1) = \int_0^1 t \times 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et $\varphi(1,1) = \int_0^1 1^2\,\mathrm{d}t = 1.$
Une base orthogonale de F est donc $\left(1, X - \frac{1}{2}\right)$. Il suffit alors de normaliser ces vecteurs pour obtenir une base orthonormale de F.
Comme $\varphi(1,1) = 1$ et que

$$\varphi\left(X - \frac{1}{2}\,, X - \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

une base orthonormale de F est $\boxed{\left(1, \sqrt{3}\,(2X-1)\right)}$.

(c) D'après le cours, si on note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base précédemment construite, alors:
$p_F(X^2) = \varphi(X^2,\varepsilon_1)\cdot\varepsilon_1 + \varphi(X^2,\varepsilon_2)\cdot\varepsilon_2 = \varphi(X^2,1)\cdot 1 + 3\varphi(X^2, 2X-1)\cdot(2X-1)$
D'où $p_F(X^2) = \frac{1}{3} + 3\int_0^1 (2t^3 - t^2)\,\mathrm{d}t \cdot (2X-1) = \frac{1}{3} + \frac{3}{6}(2X-1)$

$$\text{Ainsi } \boxed{p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}}$$

(d) D'après le cours (théorèmes de la projection orthogonale et de Pythagore),

$$\mathrm{d}(X^2, F) = \left\|X^2 - p_F(X^2)\right\| = \sqrt{\|X^2\|^2 - \|p_F(X^2)\|^2}$$

avec $\left\|X^2\right\|^2 = \int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}$ et
$\left\|p_F(X^2)\right\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{6}\right)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$
D'où $\mathrm{d}(X^2,F)^2 = \frac{1}{5} - \frac{7}{36} = \frac{1}{5 \times 36}$
Ainsi, la distance recherchée est $\boxed{\mathrm{d}(X^2,F) = \frac{1}{6\sqrt{5}}}$

(e) On sait que $\mathrm{Im}(p_F) = F$ et que p_F laisse invariant tout vecteur de F.
En particulier:

$$p_F(1) = 1 \quad \text{et} \quad p_F(X) = X.$$

On en déduit que la matrice de p_F dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ est:

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. (a) Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = \det(A - X\, I_2) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = -X(1-X) - 1 = X^2 - X - 1$$

Son discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$.

$\Delta > 0$ donc $\chi_A(X)$ admet deux racines réelles distinctes, qui sont les valeurs propres de A :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_1 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 < 0$$

(b) La matrice A est carrée d'ordre 2 et admet deux valeurs propres réelles distinctes. Donc A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et chacun de ses deux sous-espaces propres, est de dimension 1.

(c) Notons $E_{\lambda_1}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_1.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$U \in E_{\lambda_1}(A) \Leftrightarrow AU = \lambda_1 U \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ x + y = \lambda_1 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ x + \lambda_1 x = \lambda_1^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ (\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1)\, x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \lambda_1 x$$

car λ_1 étant une racine de $\chi_A(X)$, $\quad \lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 = 0$

On choisit $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$. Alors $E_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Vect}(U_1)$ est bien de dimension 1.

2. (a) $X_{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A\, X_n$

On en déduit (par une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$) que $X_n = A^n\, X_0$.

(b) *On admet* que $\exists!(a,b) \in \mathbb{R}^2$; $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = a\,\lambda_1^n + b\,\lambda_2^n$

Comme $F_0 = 0$, on obtient : $a + b = 0$ c.à.d. $b = -a$.

De plus $F_1 = 1$ entraîne que $a\,\lambda_1 + b\,\lambda_2 = 1$

D'où $(\lambda_1 - \lambda_2)a = 1$ d'où $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) a = 1$ donc $a\sqrt{5} = 1$.

Ainsi $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $b = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}$

3. (a) • $\lambda_1\,\lambda_2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{2 \times 2} = \dfrac{1^2 - \sqrt{5}^2}{4}$

$= \dfrac{1-5}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1$. Donc $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\lambda_1}$ et $\lambda_1 > 1 \Longrightarrow -1 < \lambda_2 < 0$

• La suite (F_n) est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n \geqslant F_1 > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{F_{n+1}}{F_n} \overset{\text{d'après 2.b}}{=} \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n} = \frac{\lambda_1^{n+1}\left(1 - \frac{\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1^{n+1}}\right)}{\lambda_1^n\left(1 - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n}\right)}$$

$$= \frac{\lambda_1^{n+1}\left(1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n+1}\right)}{\lambda_1^n\left(1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\right)} = \lambda_1 \frac{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n}$$

Or $-1 < \lambda_2 < 0$ et $\lambda_1 > 1$.

D'où $-1 < \dfrac{-1}{\lambda_1} < \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = 0 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n+1}$.

Ainsi $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lambda_1}$

(b) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{F_n}$. Alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série à termes strictement positifs.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{F_n}{F_{n+1}} = \dfrac{1}{\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\lambda_1}$ avec $0 < \dfrac{1}{\lambda_1} < 1$.

Donc, d'après le critère de D'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est **convergente**.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{F_n} = \frac{1}{F_1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{F_n} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{F_n}$

Sachant que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\quad F_k \geqslant \left(\dfrac{8}{5}\right)^{k-2}$, nous avons pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout entier $k \in [\![2\,,\,n]\!]$, $0 < \dfrac{1}{F_k} \leqslant \left(\dfrac{5}{8}\right)^{k-2}$

Donc, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{F_k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{5}{8}\right)^{k-2} = \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{5}{8}\right)^j$

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{F_k} \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^j$. Or on connaît la somme de la série géométrique convergente $\sum (5/8)^n$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^j = \frac{1}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{1}{3/8} = \frac{8}{3}$

Ainsi $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{F_k} \leqslant 1 + \frac{8}{3}$ c'est-à-dire $\boxed{1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{F_n} \leqslant \frac{11}{3}}$

Exercice 3

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur l'intervalle fermé $[0\,,\,+\infty[$ et $\forall\, t>0,\quad t^2\,\mathrm{e}^{-t^2} = \dfrac{t^2}{\mathrm{e}^{t^2}} = \dfrac{1}{\left(\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\right)} \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$

   car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 = 0$ et par croissance comparée $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$

   Donc, d'après le critère de Riemann, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$ On se fixe un réel $x>0$.

   (a) Soit A un réel positif tel que $A>x$.

   $$\int_x^A 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{t=x}^{t=A} = -\mathrm{e}^{-A^2}+\mathrm{e}^{-x^2}$$

   Or $\lim\limits_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-A^2} = 0$. Donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_x^A 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2}$

   Par conséquent l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_x^{+\infty} 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente et

   $$\boxed{\int_x^{+\infty} 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2}}$$

   (b) Soit t un réel tel que $t\geqslant x>0$. Alors $0<2x\leqslant 2t$. Or $\mathrm{e}^{-t^2}>0$.

   Donc $0<2x\,\mathrm{e}^{-t^2}\leqslant 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}$ puis $\mathrm{e}^{-t^2}\leqslant 2t\,\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2x}$

   On en déduit que $\forall\, t\in[x\,,\,+\infty[,\quad \mathrm{e}^{-t^2}\leqslant \dfrac{1}{2x}\left(2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\right)$

   (c) En intégrant membre à membre l'inégalité précédente, on obtient

   $$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{1}{2x}\left(2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

   avec $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{2x}\left(2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_x^{+\infty} 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{d'après 2.a}}{=} \frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x^2}$

   Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x}\mathrm{e}^{-x^2}$.

   Enfin, en multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par e^{x^2}, il vient : $f(x)\leqslant \dfrac{1}{2x}$

3. Soit l'équation différentielle linéaire scalaire du 1er ordre (E) : $\boldsymbol{y'}(x) = 2x\,\boldsymbol{y}(x)-1$

   (a) Posons $\forall\, x\in\mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

   $= \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$

   Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x\in\mathbb{R},\ g'(x) = 0-\varphi(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$

   Donc la fonction $f : x\longmapsto \mathrm{e}^{x^2}\,g(x)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

   $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,g(x)+\mathrm{e}^{x^2}\,g'(x) = 2x\,f(x)+\mathrm{e}^{x^2}\left(-\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 2x\,f(x)-1.$

   Donc la fonction f est une solution particulière de l'équation complète (E).

   (b) (i) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène (H) : $\boldsymbol{y'}(x) = 2x\,\boldsymbol{y}(x)$ sont les fonctions $x\longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x} = \lambda\,\mathrm{e}^{x^2}$ où λ est une constante réelle.

   (ii) On connaît déjà une solution particulière de (E) : la fonction f.

   (iii) La solution générale de l'équation complète (E) est la fonction

   $$\boxed{x\longmapsto f(x)+\lambda\,\mathrm{e}^{x^2}} \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle.}$$

   (c) • On rappelle que $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$

   Or $\forall\, t\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-t^2}>0$. Donc, par positivité de l'intégrale,

   $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ puis $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)\geqslant 0.$

   D'où, d'après 2.(c), $\forall\, x\in\mathbb{R}^{+*}$, $\boxed{0\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{1}{2x}}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x} = 0.$

   Ainsi d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

   et f est **une** solution de (E) admettant pour limite zéro en $+\infty$.

   • Soit h une solution quelconque de (E). Alors il existe une constante réelle λ telle que

   $$\forall\, x\in\mathbb{R},\ h(x) = f(x)+\lambda\,\mathrm{e}^{x^2}$$

   Si $\lambda>0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Si $\lambda<0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

   Finalement f est **la seule** solution de (E) admettant pour limite zéro en $+\infty$.