A21

utbm
université de technologie Belfort-Montbéliard

Final MTC1

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Les 3 exercices seront rendus sur 3 copies différentes.

Exercice 1 : projection orthogonale (7 points)

1. Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension 2 de E et (e_1, e_2) une base de F. On pose :

$$\begin{cases} g_1 = e_1 \\ g_2 = e_2 - \alpha\, e_1 \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Démontrer que (g_1, g_2) est une famille orthogonale si, et seulement si,

$$\alpha = \frac{\langle e_2 \mid g_1\rangle}{\|g_1\|^2}\, g_1$$

2. **Application**. Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1\,,\, X)$. On définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

   (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

   (b) Déterminer une base orthonormale de F pour ce produit scalaire.

   (c) Déterminer $p_F(X^2)$, le projeté orthogonal de X^2 sur F.

   (d) Calculer la distance de X^2 à F, notée $\mathrm{d}\left(X^2, F\right)$.

   (e) Sans faire de calculs, donner la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la projection orthogonale p_F sur F.

Pensez à changer de copie

Exercice 2 : suite de Fibonacci (7 points)

1. On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Calculer les valeurs propres de A.
   On notera λ_1 la valeur propre positive de A et λ_2 l'autre valeur propre.

   (b) Justifier que A est diagonalisable. On ne demande pas de diagonaliser A.

   (c) Déterminer le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_1.

2. On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} F_0 = 0\ ,\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases} \qquad \text{On pose } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

   (a) Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n. En déduire, sans démonstration, X_n en fonction de A, n et X_0.

   (b) *On admet* l'existence de constantes réelles a et b telles que $\forall n \in \mathbb{N},\quad F_n = a\,\lambda_1^n + b\,\lambda_2^n$
   Déterminer les valeurs de a et b en utilisant F_0 et F_1.

3. (a) Vérifier que $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\lambda_1}$.
   Sachant que $\lambda_1 > 1$, établir que la suite $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel λ_1.

   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{F_n}$

   (c) *On admet que* pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad F_n \geqslant \left(\dfrac{8}{5}\right)^{n-2}$. $\qquad$ Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{F_n} \leqslant \frac{11}{3}$

Pensez à changer de copie

Exercice 3 : une équation différentielle (7 points)

1. Prouver que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
   On se fixe un réel $x > 0$.

   (a) Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_x^{+\infty} 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Justifier que $\forall t \in [x\,,\,+\infty[,\quad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{2x}\left(2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\right)$

   (c) En déduire que $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$

3. On considère l'équation différentielle linéaire (E) : $\qquad \boldsymbol{y'}(x) = 2x\,\boldsymbol{y}(x) - 1$

   (a) On rappelle que si φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\Phi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$.
   En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$,
   montrer que f est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

   (b) Résoudre (E) en exprimant sa solution générale à l'aide de la fonction f.

   (c) Démontrer que f est la seule solution de (E) admettant pour limite zéro en $+\infty$.