

*La note tiendra compte de la rédaction : tout calcul non justifié par une ou plusieurs phrases ne sera pas pris en compte. Fiches et calculatrice autorisées.*

Exercice 1: (12 points) Soit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier  $n > 0$  par :

$$u_0 < v_0, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Nous allons démontrer dans ce problème que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

- Démontrer que la suite  $v_n - u_n$  est une suite géométrique? on précisera sa raison et son premier terme.
- En déduire la limite de la suite  $v_n - u_n$
- Montrer que  $u_n \leq v_n$
- Calculer  $u_{n+1} - u_n$ , en déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- Calculer  $v_{n+1} - v_n$ , en déduire que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
- En déduire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.
- Montrer que la suite  $v_n + u_n$  est constante et est égale à  $u_0 + v_0$ .
- En déduire la valeur de la limite commune aux deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Exercice 2: (8 points) On utilise un jeu de 52 cartes. On appelle "habillé" une carte représentant un roi ou une dame ou un valet. On appelle main, un sous ensemble de 5 cartes. Dans tout l'exercice, on tire simultanément les 5 cartes.

- Calculer le nombre de mains distinctes contenant exactement un as, un roi, et une dame.
- Calculer le nombre de mains distinctes contenant uniquement des cartes "habillées".
- Calculer le nombre de mains distinctes contenant **au moins** un as.
- Calculer le nombre de mains distinctes contenant uniquement des cartes rouges.

**TOURNEZ LA PAGE SVP**

Exercice 3: (12 points) Soit une suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_0$  et  $u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n}$ .

- Déterminer  $u_0$  pour que cette suite soit constante.
- On suppose que  $u_0 < 2$ . Montrer par récurrence que  $(u_n)$  est majorée par 2.
- Calculer  $u_{n+1} - u_n$  et en déduire la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que  $u_0 = -1$ . Soit une suite  $(v_n)$  telle que  $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ .

- Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
- Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$
- En déduire  $u_n = \frac{-2+6n}{2+3n}$
- Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Comparer avec le résultat de la question d.

Exercice 4: (8 points) Un restaurant propose un choix d'entrées, de plats principaux et de desserts.

On désigne par :

- E : l'évènement "un client choisit une entrée"
- D : l'évènement "un client choisit un dessert" .

Les probabilités associées valent respectivement  $p(E) = 0,4$ ,  $p(D) = 0,7$  et  $p(E \cap D) = 0,3$

- Calculer la probabilité qu'un client prenne une entrée ou un dessert.
- Calculer la probabilité qu'un client prenne une entrée et pas de dessert.
- Calculer la probabilité qu'un client ne prenne ni entrée ni dessert
- Calculer la probabilité qu'un client prenne soit une entrée soit un dessert.