UTBM MTS le 21 Janvier 2019

Arthur Lannuzel http ://mathutbmal.free.fr

Final automne 2018

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(Applications directes du cours) - 6 points*

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1) Peut-on trouver f une fonction continue sur $]a,b[$ telle que $f(]a,b[) = [c,d]$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.

2) Donner l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction réelle à une variable réelle définie pas $f(x) = \ln(e^{x+1} - 1)$.

3) Peut-on trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $+\infty$ telles que la suite $(u_n^{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.

Exercice 2 - *6 points*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

1. *Montrer que, pour tout entier n , $u_n \leq 4$.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
3. *En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer la limite.*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *2 points*

Déterminer, grâce aux équivalents, la limite en 0 *de la fonction*

$$f(x) = \frac{2.x.e^x - 2.x}{\sin(x).\ln(1+x)}.$$

.

Exercice 4 - *8 points*

On cherche les fonctions f *continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*

$$(*) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On pose $f(1) = a$.

Soit f *une fonction vérifiant* $(\star)$.

1. *Montrer que* $f(0) = 0$, *puis que* f *est impaire.*
2. *Montrer que pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$ *et tout réel* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $f(n.x) = n.f(x)$, *et que* $f(n) = na$.
3. *Montrer que pour tout rationnel* $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0)$, *on a* $f(r) = r.a$.
4. *En déduire que pour tout réel* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $f(x) = x.a$.
   (Indication : utiliser le fait que tout élément de $\mathbb{R}$ *est limite d'une suite d'éléments de* $\mathbb{Q}$*)*