

*La note tiendra compte de la rédaction : tout calcul non justifié par une ou plusieurs phrases ne sera pas pris en compte. Fiches et calculatrice autorisées.*

Exercice 1: (12 points) Soit une suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4}$ .

1. Montrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est décroissante
2. Calculer si elle existe, la limite de la suite  $(u_n)$
3. En déduire que la suite  $(u_n)$  est bornée et préciser ses bornes.
4. Soit une suite  $(a_n)$  de terme général  $a_n = \frac{1}{u_n + 1}$ 
  - (a) Montrer que  $(a_n)$  est une suite arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
  - (b) En déduire une expression de  $a_n$  en fonction de  $n$
  - (c) Montrer que  $u_n$  s'écrit en fonction de  $n$  :  $u_n = \frac{-n}{n+3}$
  - (d) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Comparer avec le résultat de la question 2.

Exercice 2: (10 points) Les aéronefs civils français (avions, planeurs, ULM, etc...) sont immatriculés de la manière suivante :

la lettre F (pays) suivie d'un tiret puis de 4 lettres majuscules (ex : F-GTAJ)

1. Combien d'aéronefs peut-on immatriculer ainsi ?

2. L'immatriculation des planeurs commence par les lettres F - C ... suivi de trois lettres. Combien peut-on en immatriculer ?



3. Combien y a-t-il d'immatriculations d'aéronefs français qui contiennent exactement 2 lettres identiques (c'est à dire 2 lettres identiques et 2 autres lettres distinctes entre elles et sans tenir compte du premier F) ?

4. Combien y a-t-il d'immatriculations d'aéronefs français qui contiennent **au moins** 2 lettres identiques (utiliser la négation - sans tenir compte du premier F) ?

**TOURNEZ LA PAGE SVP**

### Exercice 3: (8 points) Jeu Euro Millions

Le jeu consiste à choisir 5 numéros entre 1 et 50 dans une grille appelée A ainsi que 2 étoiles numérotées de 1 à 11 dans une grille B. Les tirages sont aléatoires. Un joueur gagne l'Euro Millions s'il a les 5 numéros justes ainsi que les 2 étoiles justes. Il peut aussi gagner des sommes plus petites s'il coche au moins 2 bons numéros.



1. Combien y a-t-il de possibilités pour choisir 5 numéros dans la grille A et 2 étoiles dans la grille B ?
2. Un joueur A a coché 4 bons numéros et 1 bonne étoile. Combien y a-t-il de possibilités pour choisir 4 bons numéros et 1 bonne étoile.
3. Un joueur B a coché 3 bons numéros et 2 bonnes étoiles. Combien y a-t-il de possibilités dans ce cas ?
4. Comparer le nombre de possibilités pour les joueurs A et B et en déduire les chances de gagner de chacun.

Exercice 4: (10 points) Une entreprise a acheté une machine de découpe au jet d'eau 200 000 €. Son coût de maintenance est de 10 000 € la première année et augmente ensuite de 25 % chaque année. Le coût total de la machine est égal à son prix d'achat augmenté de la somme de tous les coûts d'entretien.

On note  $u_1$  le coût de maintenance, en euros, de la première année et  $u_n$  le coût de maintenance, en euros, la  $n$ -ième année après l'achat.

1. Calculer  $u_2$
2. Pour tout nombre entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ . Quel est le type de la suite  $(u_n)$ ? Justifier
3. En déduire le coût total  $C_n$  de la machine après  $n$  années de fonctionnement.

Rappel :  $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$  avec  $q$  correspondant à la raison d'une suite géométrique.

4. (a) Quelle est la limite de la suite  $(C_n)$  ?  
(b) L'entreprise décide de limiter le coût total de cette machine, à 350 000 €. Combien d'années pourra-t-elle conserver cette machine à découpe sans dépasser son budget ?