

La note tiendra compte de la rédaction : tout calcul non justifié par une ou plusieurs phrases ne sera pas pris en compte. Fiches et calculatrice autorisées.

Exercice 1: (8 points) Soit une suite (u_n) définie pour tout entier naturel positif n par :

$$u_n = \frac{\ln n}{n^2} - 1$$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2
2. Déterminer la limite de cette suite
3. En déduire que la suite est bornée à partir du rang 2 et déterminer ses bornes.

Exercice 2: (12 points) Soit une suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{1}{3} \cdot n + 1$$

1. Calculer u_1
2. Démontrer que, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \cdot (n + 3 - u_n)$ en calculant $u_{n+1} - u_n$
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 3$
(on appelle la proposition $P_n : u_n \leq n + 3$)
4. En utilisant les résultats des questions 2. et 3., en déduire la monotonie de la suite (u_n)
5. Soit une suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - n$
Déterminer la nature de cette suite (arithmétique ou géométrique). On précisera sa raison et son premier terme.
6. En déduire que pour tout n entier naturel, $u_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$
7. Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 3: (10 points)

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1	2	3
4	5	6
A	B	C

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes différents sans le chiffre 6 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 6 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins 2 chiffres identiques ?

TOURNEZ LA PAGE SVP

Exercice 4: (10 points)

Une étude de la population de Belfort a fait apparaître que pendant un mois :

35% des personnes sont allées au cinéma (C)

25% des personnes sont allées au restaurant (R)

10% des personnes sont allées aux deux.



Calculer la probabilité que, pendant un mois, une personne ait fait les choix suivants :

1. Ne pas aller au cinéma
2. Aller au cinéma ou au restaurant
3. Aller au cinéma mais pas au restaurant
4. N'aller ni au cinéma, ni au restaurant
5. Aller soit au cinéma soit au restaurant (mais pas les deux)