

Final automne 2019

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 (*Applications directes du cours*) - 8 points

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

2. Déterminer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin^2(x)}.$$

3. A quelle condition sur $m \in \mathbb{R}$, le polynôme suivant a-t-il une racine strictement négative et une autre strictement positive :

$$P(x) = x^2 + (2m + 1)x + m.$$

Justifier!

4. Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 2y + 2x \end{pmatrix}$$

Cette application est-elle surjective ? injective ? Justifier!

Exercice 2 - 4 points

Soit la fonction réelle définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 + 3x}{5 - 2x}}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer la dérivée de f .

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - 8 points

Soit une suite $(u_n)_n$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n} \end{cases}$$

1. (a) Déterminer u_0 pour que cette suite soit constante.
 - (b) On suppose que $u_0 < 2$. Montrer par récurrence que $(u_n)_n$ est majorée par 2.
 - (c) Calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_n$.
 - (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.
2. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $u_0 = -1$. Soit une suite $(v_n)_n$ telle que $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.
 - (a) Calculer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n . En déduire que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
 - (b) Calculer v_n en fonction de n .
 - (c) En déduire $u_n = \frac{-2+6n}{2+3n}$.
 - (d) Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$. Comparer avec le résultat de la question 1-d.