utbm université de technologie Belfort-Montbéliard
Aleth Chevalley

Médian

MT 18
A 11

Calculatrice et fiches autorisées

Exercice 1 (12 points) :

On désigne par f_n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\mathbf{f_n(x) = x^n . e^{-x}}$ On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Calculer la dérivée de f_n .

2) On choisit n = 2
   a) Déterminer les limites de f_2 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) En déduire une droite asymptote de $\mathcal{C}_2$ et donner son équation.
   c) En utilisant la réponse de la question 1), étudier les variations de f_2 et dresser son tableau de variations.

3) On choisit n = 5
   a) Déterminer les limites de f_5 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de f_5 et dresser son tableau de variations.

4) Généralisation. Si n est pair on écrit n = 2p et si n est impair on écrit n = 2p+1.
   a) Etudier les variations de f_{2p} et dresser son tableau de variation. De même pour f_{2p+1}. Conclure.
   b) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par 0 et un autre point dont on donnera les coordonnées.

5) Soit n = k un entier naturel non nul et $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative.

   a) Déterminer l'équation de la tangente T_k à la courbe au point d'abscisse 1.

   b) La droite T_k coupe l'axe des abscisses en un point A. Montrer que les coordonnées du point A valent ($\frac{k-2}{k-1}$, 0).
   c) Soit A = (4/5,0). En déduire la valeur de l'entier k.

6) Calculer une primitive de f_2.

TOURNEZ LA PAGE SVP

Exercice 2 (4 points) : Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a) Déterminer le domaine de définition de cette fonction.

b) Etudier les variations de f.

c) Calculer les limites de f en en $-\infty$ et en $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 3 (4 points) : Résoudre le système : $\begin{cases} chx + chy = 3 \\ shx + shy = 2 \end{cases}$

Exercice 4 (6 points) : Calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$ en utilisant le changement de variable t = $\sqrt{x}$

Exercice 5 (4 points) : On cherche à calculer F(x) = $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

a) Trouver deux réels a et b tels que : $\dfrac{2}{t^2-1} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{t-1}$

b) Déterminer F(x) en utilisant un changement de variable