Médian MT 18

Aleth Chevalley A 13

Calculatrice et fiches autorisées

Exercice 1 (8 points) Etude de la fonction définie par $f(x) = \text{th}x - \dfrac{1}{\text{ch}x}$

a) Donner le domaine de définition de cette fonction
b) Résoudre l'équation 1 + shx = 0
c) Calculer la dérivée de f
d) Etudier les variations de la fonction f, en utilisant le résultat de la question b)
e) Dresser le tableau de variation
f) Calculer toutes les limites
g) En déduire les asymptotes
h) Déterminer l'équation de la tangente au point 0

Exercice 2 (8 points) Etude de la fonction $f(x) = \sqrt{x}^{\,x}$

a) Donner le domaine de définition de cette fonction
b) Calculer les limites aux bornes de ce domaine
c) Etudier le signe de ln(x) + 1
d) Calculer la dérivée de f
e) Etudier le signe de la dérivée (en utilisant la question c)
f) Tracer le tableau de variation de f

Exercice 3 (8 points) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2t^2 - 2}}$ b) $f(x) = \text{th}x - \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$

c) Calculer le volume d'une sphère de rayon R : $V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - h^2\right).dh$

Exercice 4(8 points) Soient f et g les fonctions définies sur ℝ par : f(x) = (2x+1).cos²x et g(x) = (2x+1).sin²x

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx$

a) Calculer I + J
b) Monter que I – J s'écrit sous la forme $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1).\cos(2x)dx$
c) Calculer I – J à l'aide d'une intégration par parties
d) En déduire les valeurs de I et J

Exercice 5 (8 points) Une société d'achat en ligne veut analyser le déroulement d'une vente promotionnelle « flash » qu'elle a organisée sur internet. Cette vente d'une durée de trois minutes a provoqué sur son site un flux financier continu et dont la vitesse instantanée a été variable en fonction du temps.
On a modélisé cette vitesse pendant les trois minutes de l'ouverture du site par la fonction f définie par :

$f(t) = 20.t.e^{-\frac{t^2}{2}}$ où t est le temps, exprimé en minutes (t ∈ [0 ;3]) et f(t) la vitesse instantanée de ce flux, exprimée en milliers d'euros par minute. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

a) Déterminer les primitives F de la fonction f.
b) En déduire l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations t=0 et t=3, exprimées en unités d'aire.
c) Quelle est la somme totale transférée à la fin des trois minutes (à un euro près) ?