

Final printemps 2019

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 (*Applications directes du cours*) - 6 points

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1) *Peut-on trouver un polynôme de degré 4, n'admettant aucune racine réelle ? Si oui, donner un exemple, sinon, justifier.*

2) *Montrer, grâce au théorème des accroissements finis que*

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ln(x) \leq (x - 1).$$

3) *Déterminer, grâce à la formule de Taylor, le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $x \mapsto \arctan(x)$*

Exercice 2 - 4 points

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} \cdot (x + 1) + 1$. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction f au voisinage de 0*

2. *En déduire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente en ce point.*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - 6 points

Dans cet exercice, on se propose de calculer

$$I = \int_{-1}^0 \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}} + t + \sqrt{t+1} + 2} dt.$$

1. Factoriser le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{a \cdot x+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1}$.
3. Grâce aux questions précédentes et au changement de variable $x = \sqrt{t+1}$, calculer I .

Exercice 4 - 4 points

Déterminer les coordonnées du centre de gravité $G = (x_G, y_G)$ du domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 1, y \geq x^2 - 1, y - x - 1 \leq 0\}.$$