Aleth Chevalley

Final

MTT2
P2015

Calculatrices et fiches autorisées.

Exercice 1 : (6 points) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :
$\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \leq \arcsin(x) - \frac{\pi}{6}$ pour tout $x \in [\frac{1}{2}; 1]$

Exercice 2 : (6 points) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\ln(1+\sin x) - x}$ en utilisant les développements limités.

Exercice 3 : (6 points) Etude de la branche infinie en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = x. \ln(\frac{1+x}{x}).\sqrt{x^2-1}$
Donner la position relative de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote en $+\infty$.

Exercice 4 : (8 points) Etude de la fonction $f(x) = \arctan(x + \sqrt{x^2-1})$

a. Déterminer le domaine de définition de la fonction f
b. Montrer que la dérivée de la fonction vaut $f'(x) = \frac{1}{2.x\sqrt{x^2-1}}$
c. Tracer le tableau de variation de la fonction
d. Déterminer les limites de cette fonctions en -1, 1, $-\infty$ et $+\infty$ en détaillant les calculs.

Exercice 5 : (8 points) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ et une droite D de vecteur directeur $\vec{u} = (2, -1, 1)$. On note P_1 le plan passant par ces 2 points et contenant la droite D et on appelle $\vec{N_1}$ le vecteur normal au plan P_1.

a. Déterminer le vecteur normal $\vec{N_1}$ puis l'équation cartésienne du plan P_1 passant par ces 2 points A et B et contenant la droite D.

Soit P_2 le plan perpendiculaire à P_1, passant par un point $C = (1, -1, 1)$ et contenant la droite D.

b. Montrer que les 2 vecteurs $\vec{N_1}$ et $\vec{u}$ appartiennent au plan P_2. En déduire les équations paramétriques du plan P_2.
c. Déterminer l'équation cartésienne de ce plan P_2
d. En utilisant le fait que la droite D est à l'intersection des 2 plans P_1 et P_2, déterminer les coordonnées d'un point I, appartenant à cette droite.

Exercice 6 : (6 points) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'équation suivante $x^2 + 4\alpha y^2 + 2z^2 - 2x + 4z = 1$ qui correspond à une quadrique.
Déterminer, en fonction de α, la nature de la quadrique et ses caractéristiques.