Final MTT - P17

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Soient u_0 et v_0 deux réels fixés, et soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - v_n = \frac{1}{3^n}\left(u_0 - v_0\right)$$

2. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont de monotonies contraires.
3. En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes.

Exercice 2.

1. Soit P un polynôme à coefficients réels :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_nX^n,$$

et soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(\alpha) = 0$ alors $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2. On considère le polynôme :

$$Q = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2.$$

(a) Montrer que $Q(i) = 0$.

(b) Sans effectuer de calcul, montrer que Q est divisible par $X^2 + 1$.

(c) Factoriser Q en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$$

On rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de f'
2. En déduire que le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction f est donné par :

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + x^5\varepsilon(x).$$

3. Soit Δ la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f en 0.

(a) Donner l'équation de Δ.

(b) Quelle est la position relative de Δ par rapport à $\mathcal{C}$ au voisinage de 0 ?

4.(a) Calculer la valeur exacte de $f(1/\sqrt{3})$ et illustrer le résultat.

(b) Donner une valeur approchée de $f(1/\sqrt{3})$ à l'aide de la question 2.

(c) Quelle est la précision de l'approximation précédente ?