Aleth Chevalley

Final

MTT2
P2018

La note tiendra compte de la rédaction : tout calcul non justifié par une ou plusieurs phrases ne sera pas pris en compte. Fiches et calculatrice autorisées.

Exercice 1 : (8 points)

Etude de la branche infinie en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$

1. Déterminer le développement asymptotique de la fonction f au voisinage de $+\infty$
2. Déterminer l'asymptote et la position relative de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote en $+\infty$.

Exercice 2 : (8 points)

Soit $\mathscr{B}_{\mathscr{C}} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui même définie par :
$f(e_1) = e_1 - e_2, \quad f(e_2) = -e_1 + e_2$

1. Déterminer $Kerf$ (équations, base et dimension)
2. Déterminer Imf (équations, base et dimension)
3. Montrer que $\mathbb{R}^2 = Kerf + Imf$
4. Est ce une somme directe ?

Exercice 3 : (10 points)

Soit $\mathscr{B}_{\mathscr{C}} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui même définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, \quad 2x - y, \quad -2x + 2y + z) \end{array} \right.$$

1. Déterminer la matrice $A = mat(f, \mathscr{B}_{\mathscr{C}}, \mathscr{B}_{\mathscr{C}})$ associée à f dans la base canonique.
2. Soit dans $\mathbb{R}^3$, $v_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad v_2 = e_2 - e_3, \quad v_3 = e_1 + e_2 \quad$ et $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$, une base de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Calculer les vecteurs e_1, e_2, e_3 de la base canonique $\mathscr{B}_{\mathscr{C}}$ en fonction des vecteurs v_1, v_2, v_3 de la base $\mathscr{B}$
   (b) Calculer les images des vecteurs de la nouvelle base : c'est à dire $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_{\mathscr{C}}$
   (c) Puis calculer ces mêmes vecteurs $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ dans la nouvelle base $\mathscr{B}$
   (d) En déduire la matrice $A' = mat(f, \mathscr{B}, \mathscr{B})$.

TOURNEZ LA PAGE SVP

Exercice 4 : (8 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,
on considère la droite D d'équations $\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$

1. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite D
2. Trouver un point particulier A pour cette droite
3. En déduire les équations paramétriques de D
4. Donner l'équation cartésienne du plan P passant par $B=(-3,2,2)$ et contenant D.

Exercice 5 : (6 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les équations qui correspondent à des quadriques.

Pour chaque cas, déterminer la nature de la quadrique, ses caractéristiques et tracer l'allure de la courbe :

1. $x^2+y^2-2y+2x-z=-2$
2. $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+z^2=R^2, z\geq 0, 0\leq y\leq 3, R\in\mathbb{R}^+\}$

Bon courage