

Calculatrices et fiches autorisées.

Exercice 1: (8 points) Soit un polynôme $P(X) = X^n + X^2 - 1$ avec n supérieur ou égal à 2.

Le but de cet exercice est de calculer le polynôme reste $R(X)$ d'une division euclidienne sans chercher à calculer le quotient.

- On divise le polynôme P par un polynôme $B(X) = X^2 - 1$. On appelle $R(X)$ le reste de cette division euclidienne. Ecrire la formule correspondante appelée (1).
- Quel est le degré du polynôme reste $R(X)$?
- Trouver les racines du polynôme $B(X)$ et calculer P pour ces valeurs.
- En déduire $R(X)$.

Exercice 2: (6 points) Soit P un polynôme tel que : $P(X) = X^6 + \pi X^4 - X^2 - \pi$.

- Chercher des racines évidentes de P
- Ecrire P sous forme de produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer les racines de P
- Ecrire P sous forme de produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et déterminer les racines de P .

Exercice 3: (6 points) Donner un **équivalent** de $1 - x^{\frac{2}{x}}$ au voisinage de $+\infty$

Exercice 4: (6 points) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\frac{1}{x}) - 1}{(\sin(\frac{1}{x}))^\alpha}$ en fonction de α , $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 5: (8 points) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} - 1 & \text{si } x < 1 \\ m (m \in \mathbb{R}) & \text{si } x = 1 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Pour quelle valeur de m , la fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
- Est ce que la fonction f est dérivable au point 1 ?

Exercice 6: (6 points) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln(1+x) + \sqrt{x} - \lambda = 0$ admet-elle une **unique** racine dans l'intervalle fermé $[0, 1]$