

MTZ - Automne 2019

Note : L'usage de la calculatrice est interdit. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. **En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.**

Exercice 1. Soit :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-4x} - e^{-2x}$$

1. Étudier les variations de f : dérivée, tableau de variations et limites aux bornes du domaine.
2. Démontrer que f admet un minimum et déterminer la valeur de ce minimum sous forme d'une fraction irréductible.
3. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
4. En déduire l'allure du graphe de f : on prendra soin de bien faire apparaître tous les résultats précédents sur le dessin.

Exercice 2. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Parmi les formules suivantes, recopier celles qui sont justes (sans justifier). Pour celles qui sont fausses, donner un contre-exemple numérique :

- (a) $(e^a)^b = e^{ab}$
- (b) $e^a + e^b = e^{a+b}$
- (c) $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$
- (d) $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$
- (e) $\cos(a - b) = \cos(a) \sin(b) + \cos(b) \sin(a)$
- (f) $\sqrt{a}^{\sqrt{b}} = \sqrt{a^b}$

Exercice 3. On considère l'équation de $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(E) : \cos(2x - \pi) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

1. Résoudre (E) sur \mathbb{R} .
2. En déduire l'ensemble des solutions de E sur $[0, \pi[$.

Exercice 4. On considère la suite complexe $(z_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n \end{cases}$$

1. Calculer sous forme exponentielle z_0 , z_1 et z_2 .
2. Conjecturer alors la forme exponentielle de z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 5. Soit l'équation de $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) : |2x + 1| + |x - 1| \geq 3$$

1. Démontrer que :

$$(E) \iff x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation ci-dessous sur l'intervalle $[0, \pi]$:

$$(F) : |2 \cos(2x) + 1| + |\cos(2x) - 1| < 3$$