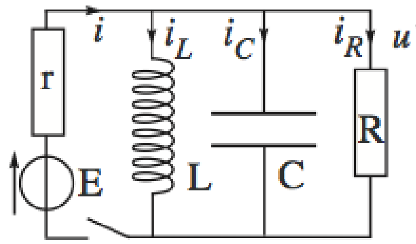
Exercice 1 (4 points) : Sur le schéma du montage ci-contre, le générateur de tension est idéal, de f.é.m. E constante. Les relations qui existent entre les grandeurs électriques dans chaque branche sont :



$$i = i_L + i_C + i_R \qquad (1)$$

$$u = u_R = u_C = u_L = E - ri \qquad (2)$$

$$u_R = Ri_R, \quad u_C = \frac{q}{C} \quad \text{avec : } i_C = C\frac{du}{dt} \qquad (3)$$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad (4)$$

1. (2 points) Etablir l'équation différentielle liant i_R à ses dérivées par rapport au temps t sous la forme :

$$\frac{d^2 i_R}{dt^2} + A\,\frac{di_R}{dt} + B\,i_R = 0$$

   où A et B sont des constantes à déterminer.
2. (2 points) En déduire une représentation d'état du circuit sous la forme $\dot{X} = AX$.

Exercice 2 (16 points) : Considérons un système défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u = AX + Bu$$

$$y = (1, 0)x = CX$$

On supposera que l'état initial du système est caractérisé par un vecteur d'état nul.

1. (2 points) Dans le domaine de Laplace, calculer la matrice de transition $L_p(e^{At}) = (pI - A)^{-1}$.
2. (2 points) Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A avec $\lambda_1 > \lambda_2$.
3. (2 points) Calculer les vecteurs propres e_1 et e_2 relatifs aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement. On choisira e_1 tel que sa première composante soit négative.
4. (2 points) Dans la suite on prendra

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

   Fournir la matrice de passage T de la base canonique à la base propre. En déduire T^{-1}.
5. (2 points) Calculer la matrice de transition $e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$.
6. (2 points) Vérifier ce résultat par la méthode de Sylvester.
7. (3 points) Pour une entrée en échelon unité, calculer l'expression du vecteur d'état $X(t)$.
8. (1 point) En déduire l'expression de la sortie.