Exercice 1 (4 points) : Considérons un système défini par l'équation d'état suivante :

$$\boldsymbol{\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u = AX + Bu}$$
$$\boldsymbol{y = (1,0)X = CX}$$

On supposera que l'état initial du système est caractérisé par un vecteur d'état nul $\boldsymbol{X(0) = \binom{0}{0}}$.

1. (2 points) Dans le domaine de Laplace, calculer la matrice de transition

$$\boldsymbol{Lp(e^{At}) = (pI - A)^{-1}}$$

2. (2 points) En déduire la fonction de transfert $\boldsymbol{H(p)}$ du système.

Exercice 2 (16 points) : Considérons un système défini par l'équation d'état suivante :

$$\boldsymbol{\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u = AX + Bu}$$
$$\boldsymbol{y = (1,0)X = CX}$$

avec $\boldsymbol{a > 1}$. On supposera que l'état initial du système est caractérisé par un vecteur d'état nul $\boldsymbol{X(0) = \binom{0}{0}}$.

1. (1 point) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice $\boldsymbol{A}$ est de la forme :

$$\boldsymbol{p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (1+a)\lambda + a}$$

2. (1 point) Montrer que le discriminant du polynôme caractéristique peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Delta = (a-1)^2}$$

3. (2 points) En déduire les valeurs propres $\boldsymbol{\lambda_1}$ et $\boldsymbol{\lambda_2}$ de $\boldsymbol{A}$ avec $\boldsymbol{\lambda_1 < \lambda_2}$.
4. (2 points) Calculer les vecteurs propres $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ relatifs aux valeurs propres $\boldsymbol{\lambda_1}$ et $\boldsymbol{\lambda_2}$ respectivement.
5. (2 points) Dans la suite on prendra

$$\boldsymbol{D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

   Fournir la matrice de passage $\boldsymbol{P}$ de la base canonique à la base propre. En déduire $\boldsymbol{P^{-1}}$.
6. (2 points) Calculer la matrice de transition $\boldsymbol{e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}}$.
7. (2 points) Vérifier ce résultat par la méthode de Sylvester.
8. (3 points) Pour une entrée en échelon unité, calculer l'expression du vecteur d'état $\boldsymbol{X(t)}$.
9. (1 point) En déduire l'expression de la sortie $\boldsymbol{y(t)}$.