**Exercice 1 : 5 points**

Soit $f$ une fonction périodique de période $T$.

1. (1 point) Rappeler la formule de la série de Fourier complexe de la fonction $f(t)$.
2. (2 points) Exprimer la série de Fourier complexe de $f(t-t_0)$ en fonction de celle de $f(t)$.
3. (2 points) En déduire la relation qui lie les coefficients de la série de Fourier de $f(t)$ à ceux de $f(t-t_0)$.

**Exercice 2 : 8 points**

Une installation électrique délivre une tension périodique $u(t)$ de période $2\pi$ et dont l'expression est de la forme

$$u(t) = t\cos(2t)$$

On s'intéresse au développement en série de Fourier du signal $u(t)$. Dans la suite de l'exercice, $a_0, a_k$ et $b_k$ désignent les coefficients du développement en série de Fourier de ce signal $u(t)$.

1. (1 point) Préciser la parité du signal $u(t)$. En déduire $a_k$ pour tout entier naturel $k$.
2. (3 points) En utilisant la relation suivante

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \sin(a-b)$$

et une intégration par partie, montrer que pour tout entier naturel $k \neq 2$ nous avons

$$b_k = -\frac{2k(-1)^k}{k^2-4}$$

3. (2 points) Calculer $b_2$.
4. (2 points) En déduire le développement en série de Fourier du signal $u(t)$

**Exercice 3 : 7 points**

Considérons un système linéaire non commandé défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x = Ax$$

1. (2 points) Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples : $\frac{p+3}{(p+1)^2}$ et $\frac{p-1}{(p+1)^2}$.
2. (2 points) Dans le domaine de Laplace, calculer la matrice de transition

$$L_p(e^{At}) = (pI-A)^{-1}$$

En déduire l'expression de $e^{At}$ en fonction de $t$.

3. (3 points) Vérifier ce résultat en calculant $e^{At}$ par la méthode de Sylvester.