Exercice 1 : 6 points

Considérons l'équation différentielle suivante :

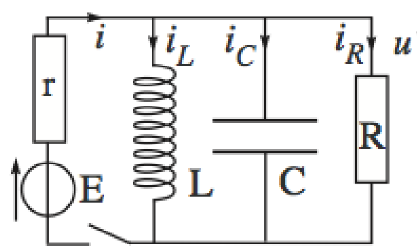
$$\ddot{y} + 9y = 9\sin(2t)$$

On suppose que $\dot{y}(0) = 0$ et $y(0) = 0$. On note $Y(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $y(t)$

1. (2 points) En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle montrer que
$$Y(p) = \frac{18}{(p^2+4)(p^2+9)}$$
Rappel : $Lp(f''(t)) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
2. (2 points) Déterminer les nombres réels A et B tels que, pour tout nombre réel p, on ait
$$Y(p) = \frac{A}{p^2+4} + \frac{B}{p^2+9}$$
3. (2 points) En déduire l'expression de $y(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

Exercice 2 : 6 points

Sur le schéma du montage ci-contre, le générateur de tension est idéal, de f.é.m. E constante. Les relations qui existent entre les grandeurs électriques dans chaque branche sont :



$$i = i_L + i_C + i_R \quad (1)$$
$$u = u_R = u_C = u_L = E - ri \quad (2)$$
$$u_R = Ri_R, \quad u_C = \frac{q}{C} \quad \text{avec : } i_C = C\frac{du}{dt} \quad (3)$$
$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \quad (4)$$

1. (3 points) Etablir l'équation différentielle liant i_R à ses dérivées par rapport au temps t sous la forme :
$$\frac{d^2 i_R}{dt^2} + A\,\frac{di_R}{dt} + B\,i_R = 0$$
où A et B sont des constantes à déterminer.
2. (3 points) En déduire une représentation d'état du circuit sous la forme $\dot{X} = AX$.

Exercice 3 : 8 points

Considérons un système linéaire non commandé défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{-6} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

1. (3 points) Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples : $\frac{1}{(p+2)(p+4)}$ et $\frac{p+6}{(p+2)(p+4)}$ et $\frac{p}{(p+2)(p+4)}$.
2. (2 points) Dans le domaine de Laplace, calculer la matrice de transition

$$\boldsymbol{L_p(e^{At}) = (pI - A)^{-1}}$$

   En déduire l'expression de $\boldsymbol{e^{At}}$ en fonction de $\boldsymbol{t}$.

3. (3 points) Vérifier ce résultat en calculant $\boldsymbol{e^{At}}$ par la méthode de Sylvester.