Exercice : Considérons la matrice suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. (2 points) Calculer le polynôme caractéristique $\boldsymbol{p(\lambda) = det(A - \lambda I)}$ et déterminer les valeurs propres $\boldsymbol{\lambda_1 > \lambda_2}$ de $\boldsymbol{A}$.
2. (1 point) La matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable ?
3. (4 points) Déterminer les sous-espaces propres $\boldsymbol{E_{\lambda_1}}$ et $\boldsymbol{E_{\lambda_2}}$ associés aux valeurs propres ainsi que leurs bases propres $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$. On veillera à ce que les composantes de $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ soient des entiers relatifs.
4. (1 point) Dans la suite on prendra $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda_2} \end{pmatrix}$. Fournir la matrice de passage $\boldsymbol{P}$ de la base canonique à la base propre.
5. (2 points) Calculer $\boldsymbol{P^{-1}}$.
6. (2 points) Calculer la matrice de transition $\boldsymbol{e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}}$.
7. (3 points) Vérifier ce résultat par la méthode de Sylvester.
8. (5 points) Considérons le système régi par l'équation d'état suivante :

$$\boldsymbol{\dot{X} = AX + Bu} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{U}$$

   Supposons que ce système soit sollicité par un échelon unité, $\boldsymbol{U = 1}$, et que son état initial est défini par :

$$\boldsymbol{X(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Rappel : La solution de l'équation d'état est donnée par

$$\boldsymbol{X(t) = e^{At}X(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu\, d\tau}$$

   (a) (1 point) Donner l'expression de $\boldsymbol{e^{-A\tau}}$.
   (b) (1 point) Calculer $\boldsymbol{e^{-A\tau}Bu}$.
   (c) (3 points) En déduire l'expression du vecteur d'état $\boldsymbol{X(t)}$ en fonction de $\boldsymbol{t}$.

Correction :

1. $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = -4}$.
2. Les valeurs propres sont distinctes donc $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable.
3. $$\boldsymbol{E_{-1}} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\boldsymbol{E_1} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
4. Dans la suite on prendra $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
5. $$\boldsymbol{P^{-1}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
6. $$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-t} + e^{-4t} & 2e^{-4t} - 2e^{-t} \\ e^{-4t} - e^{-t} & e^{-t} + 2e^{-4t} \end{pmatrix}$$
7. $$\begin{cases} e^{-t} & = \alpha_0 - \alpha_1 \\ e^{-4t} & = \alpha_0 - 4\alpha_1 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} \alpha_0 & = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right) \\ \alpha_1 & = \frac{1}{3}\left(4e^{-t} - e^{-4t}\right) \end{cases}$$
   Ainsi,
$$e^{At} = \alpha_0 I_2 + \alpha_1 A = \begin{pmatrix} -2\alpha_1 + \alpha_0 & -2\alpha_1 \\ -\alpha_1 & -3\alpha_1 + \alpha_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{-t} + e^{-4t} & 2e^{-4t} - 2e^{-t} \\ e^{-4t} - e^{-t} & e^{-t} + 2e^{-4t} \end{pmatrix}$$
8. $$X(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 + e^{-4t} - 8e^{-t} \\ -5 + e^{-4t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$