Exercice 1 : Considérons la matrice suivante :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 pts) 1. Calculer le polynôme caractéristique $\boldsymbol{p(\lambda) = det(A - \lambda I)}$ et déterminer les valeurs propres $\boldsymbol{\lambda_1 > \lambda_2}$ de $\boldsymbol{A}$.

(1 pt) 2. La matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable ?

(4 pts) 3. Déterminer les sous-espaces propres $\boldsymbol{E_{\lambda_1}}$ et $\boldsymbol{E_{\lambda_2}}$ associés aux valeurs propres ainsi que leurs bases propres $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$. On veillera à ce que les composantes de $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ soient des entiers relatifs.

(1 pt) 4. Dans la suite on prendra $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda_2} \end{pmatrix}$. Fournir la matrice de passage $\boldsymbol{P}$ de la base canonique à la base propre.

(1 pt) 5. Calculer $\boldsymbol{P^{-1}}$.

(1 pt) 6. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{e^{At}}$?

(2 pts) 7. Calculer la matrice de transition $\boldsymbol{e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}}$.

(3 pts) 8. Vérifier ce résultat par la méthode de Sylvester.

Exercice 2 : Soit la matrice suivante $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-3} \end{pmatrix}$.

(1 pts) 1. Calculer les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$.

(4 pts) 2. Calculer $\boldsymbol{e^{At}}$ par la méthode de Sylvester.