Final 2022, UV OI45, durée 2h

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 4+a & 5+a \\ a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

1. Calculer le polynôme caractéristique — 1pt
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ? — 3pts

Exercice 2 : Soit la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A. — 1pt
2. Calculer e^{At} par la méthode de Sylvester. — 3pts

Exercice 3 : On considère un système numérique dont l'entrée X et la sortie Y sont définies par

$$Y(z) = \frac{2\left(1+z^{-1}\right)}{51-49z^{-1}} X(z)$$

1. Montrer que — 2pts

$$51Y(z) - 49z^{-1}Y(z) = 2X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

2. En déduire que, pour tout nombre entier $n \geqslant 0$, on a : — 2pts

$$y(n) = \frac{49}{51}y(n-1) + \frac{2}{51}x(n) + \frac{2}{51}x(n-1)$$

3. Dans cette question, on suppose que, pour tout entier n, on a $x(n) = u(n)$ où u est la suite échelon unité définie par

$$u(n) = 0 \quad \text{si } n < 0; \qquad u(n) = 1 \quad \text{si } n \geqslant 0$$

   a. Montrer que — 2pts

$$Y(z) = \frac{2z(z+1)}{(51z-49)(z-1)}$$

   b. Déterminer les réels A et B tels que — 4pts

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z - \frac{49}{51}}$$

   c. En déduire $y(n)$ pour tout nombre entier naturel n. — 2pts

y	δ	$u(n)$	$nu(n)$	$a^n u(n)$	$y(n-1)u(n-1)$	$y(n-2)u(n-2)$
$Y(z)$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z}{z-a}$	$z^{-1}Y(z)$	$z^{-2}Y(z)$