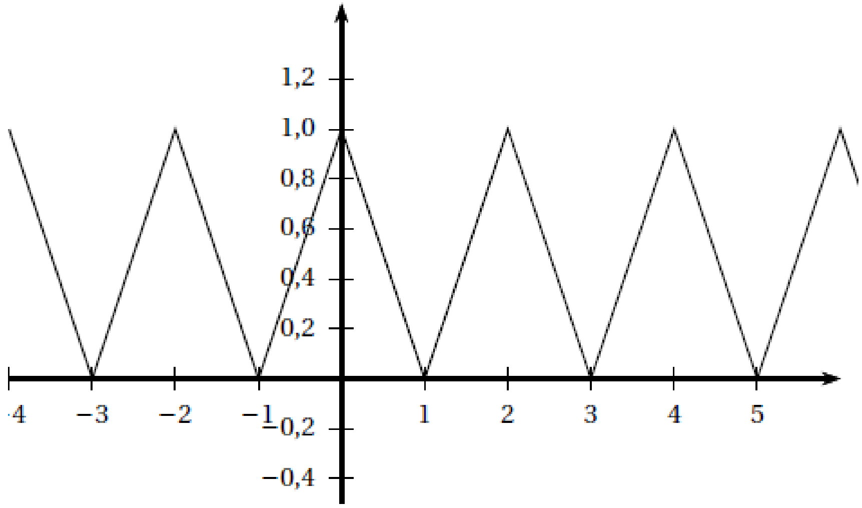
∾ Final 2023, UV OI45, durée 2h ∾

Exercice 1 :

On considère la fonction f, périodique de période T, dont une représentation graphique est donnée par la figure ci-dessous.



Le développement en série de Fourier de la fonction f est noté :

$$a_0 + \sum_{n \geqslant 1} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

1. Déterminer l'expression de f sur $[0,1]$.
2. Quelle est la période T de la fonction f
3. Calculer a_0 ainsi que a_1.
4. Calculer la puissance moyenne du signal P

Exercice 2

On considère un système entré-sortie numérique défini par l'équation aux différences :

$$y(n) - y(n-2) = 0,04\, x(n-1).$$

Avec $x(n)$ l'entrée du système et $y(n)$ sa sortie. On note $X(z)$ et $Y(z)$ les transformées en Z respectives des signaux causaux x et y.

1. Déterminer l'expression de $\dfrac{Y(z)}{X(z)}$.
2. On suppose que le signal d'entrée est l'échelon unité discret :

$$x(n) = u(n) \text{ avec } u(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

   En déduire l'expression de $Y(z)$.
3. Déterminer alors l'expression de $y(n)$ en fonction de n.

Exercice 3 :

Soit la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Calculer e^{At} par la méthode de Sylvester.

Rappel sur les séries de Fourier :

— Si $f(t)$ est une fonction périodique de période T alors :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt; \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt; \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt;$$

— Si $g(t)$ est une fonction paire alors $\int_{-a}^{a} g(t)dt = 2\int_{0}^{a} g(t)dt$

— Si $g(t)$ est une fonction impaire alors $\int_{-a}^{a} g(t)dt = 0$

Rappel sur la transformée en Z :

$y(n)$	δ	$u(n)$	$nu(n)$	$a^n u(n)$	$y(n-1)u(n-1)$	$y(n-2)u(n-2)$
$Y(z)$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z}{z-a}$	$z^{-1}Y(z)$	$z^{-2}Y(z)$