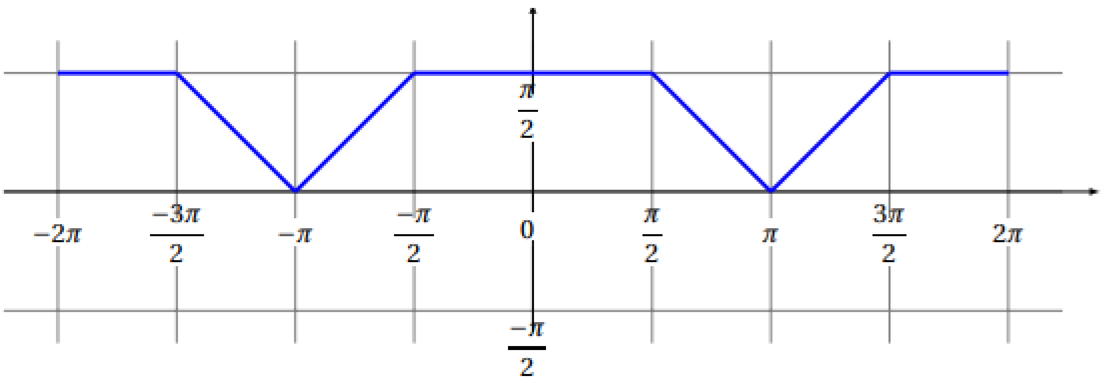
∾ Final 2024, UV OI45, durée 2h ∾

Exercice 1 : Un formulaire sur les séries de Fourier est placé en Annexe.
On considère la fonction f, périodique de période T, dont une représentation graphique est donnée par la figure ci-dessous.



Le développement en série de Fourier de la fonction f est noté : $f(t) = a_0 + \sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$

1. Donner l'expression de f sur $[0,\pi]$. **2 pts**
2. Déterminer la période T de la fonction f. **1 pts**
3. Calculer a_0 et a_1 . **2 pts**

Exercice 2 : Une table sur la transformée en Z est placée en Annexe. On considère un système entré-sortie numérique défini par l'équation aux différences :

$$y(n) = \frac{9}{11} y(n-1) + \frac{4}{11} e(n) + \frac{4}{11} e(n-1)$$

Avec $e(n)$ l'entrée du système et $y(n)$ sa sortie. On note $E(z)$ et $Y(z)$ les transformées en Z respectives des signaux causaux e et y.

1. Déterminer l'expression de $\frac{Y(z)}{E(z)}$. **2 pts**
2. On suppose que le signal d'entrée est donné par :

$$e(n) = n\, u(n) \text{ avec } u(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

   Déterminer l'expression de $Y(z)$. **2 pts**
3. En déduire $y(n)$ en fonction de n. : **2 pts**

Exercice 3 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ? **3 pts**

Exercice 4 : Soit la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A. **1 pt**
2. Calculer e^{At} par la méthode de Sylvester. **3 pts**

Annexe

Rappel sur les séries de Fourier :

— Si $f(t)$ est une fonction périodique de période T alors :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt; \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)\,dt; \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)\,dt;$$

— Si $g(t)$ est une fonction paire alors $\int_{-a}^{a} g(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} g(t)\,dt$

— Si $g(t)$ est une fonction impaire alors $\int_{-a}^{a} g(t)\,dt = 0$

Rappel sur la transformée en Z :

$y(n)$	δ	$u(n)$	$nu(n)$	$a^n u(n)$	$y(n-1)u(n-1)$	$y(n-2)u(n-2)$
$Y(z)$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z}{z-a}$	$z^{-1}Y(z)$	$z^{-2}Y(z)$