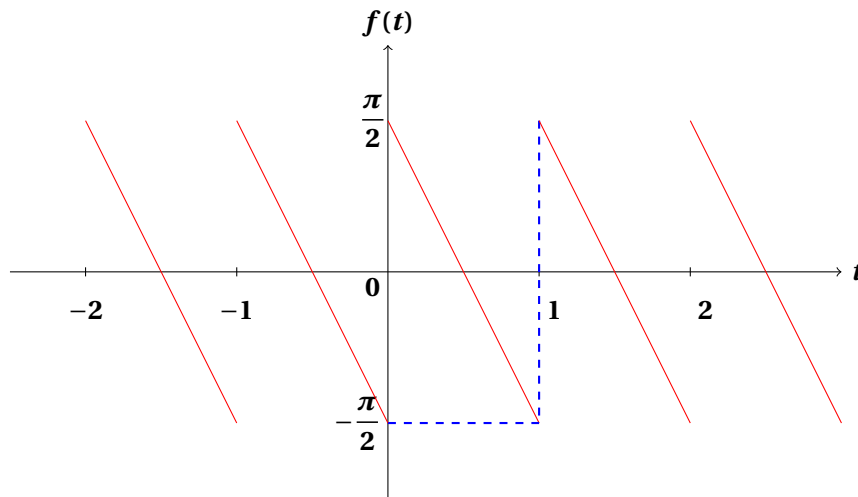


Nom et Prénom .....

L'exercice 2 est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Il faut Cocher la bonne réponse. Une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

**Exercice 1 : (7 pts)** Un formulaire sur les séries de Fourier est placé en Annexe.

On considère la fonction  $f$ , périodique de période  $T$ , dont une représentation graphique est donnée par la figure ci-dessous.



Le développement en série de Fourier de la fonction  $f$  est noté :  $f(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$

1. Donner l'expression de  $f$  sur  $[0, 1]$ . 2 pts
2. Calculer la période  $T$  de la fonction  $f$ . 1 pts
3. Calculer la valeur du nombre réel  $a_0$ . 2 pts
4. Calculer l'expression du coefficient  $b_n$ . 2 pts

**Exercice 2 : (6 pts)** Une table sur la transformée en  $Z$  est placée en Annexe. On considère un système entré-sortie numérique défini par l'équation aux différences :

$$y(n) - y(n-1) - 6y(n-2) = e(n) + e(n-2).$$

Avec  $e(n)$  l'entrée du système et  $y(n)$  sa sortie. On note  $E(z)$  et  $Y(z)$  les transformées en  $Z$  respectives des signaux causaux  $e$  et  $y$ .

1. L'expression de  $\frac{Y(z)}{E(z)}$  est :

2 pts

$\frac{z^{-2} + 1}{(z^{-1} + 2)(z^{-1} - 3)^2}$     
  $\frac{z^2 + 1}{(z^{-1} + 2)(z^{-2} - 3)}$     
  $\frac{z^2 + 1}{(z + 2)(z - 3)^2}$     
  $\frac{z^2 + 1}{(z + 2)(z - 3)}$

2. On suppose que le signal d'entrée est donné par :

$$e(n) = 3^n u(n) \quad \text{avec } u(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

L'expression de  $Y(z)$  est :

2 pts

$Y(z) = \frac{z^3 + z}{(z + 2)^2(z - 3)^2}$     
  $Y(z) = \frac{z^2 + z}{(z + 2)(z - 3)^2}$     
  $Y(z) = \frac{z^3 + 1}{(z + 2)^2(z - 3)}$     
  $Y(z) = \frac{z^3 + z}{(z + 2)(z - 3)^2}$

3. L'expression de  $y(n)$  en fonction de  $n$  est :

2 pts

$y(n) = \frac{3}{5} 3^n u(n) + \frac{3}{2} 3^n \times nu(n) + \frac{2}{5} (-2)^n u(n)$     
  $y(n) = \frac{4}{5} 3^n u(n) + \frac{2}{3} \times nu(n) + \frac{1}{5} (-2)^n u(n)$   
  $y(n) = y(n) = \frac{4}{5} 3^n u(n) + \frac{2}{3} 3^n \times nu(n) + \frac{1}{5} (-2)^n \times nu(n)$     
  $y(n) = \frac{4}{5} 3^n u(n) + \frac{2}{3} 3^n \times nu(n) + \frac{1}{5} (-2)^n u(n)$

**Exercice 3 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 2+a & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Pour quelles valeurs de  $a$  la matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

3 pts

**Exercice 4 : (4 pts)** Soit la matrice suivante  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer les valeurs propres de  $A$ .

1 pt

2. Calculer  $e^{At}$  par la méthode de Sylvester.

3 pts

## Annexe

## Rappel sur les séries de Fourier :

— Si  $f(t)$  est une fonction périodique de période  $T$  alors :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt;$$

— Si  $g(t)$  est une fonction paire alors  $\int_{-a}^a g(t) dt = 2 \int_0^a g(t) dt$

— Si  $g(t)$  est une fonction impaire alors  $\int_{-a}^a g(t) dt = 0$

## Rappel sur la transformée en $Z$ :

$y(n)$	$u(n)$	$nu(n)$	$a^n u(n)$	$na^n u(n)$	$y(n-1)u(n-1)$	$y(n-2)u(n-2)$
$Y(z)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$z^{-1}Y(z)$	$z^{-2}Y(z)$