PMIB – P2021 **Final** ⌛ **: 90 min**

Jeudi 13 janvier 2022 **: interdits**

Nom	Prénom	Groupe	Signature

1. NOMBRES COMPLEXES

1. Autour des racines quatrièmes de −1:

- Soit l'équation EQ1 d'inconnue Z :

$$Z^4 = -1 \qquad (EQ1)$$

a) Déterminer l'ensemble solution de (EQ1).

- Soit l'équation EQ2 d'inconnue z :

$$(z-j)^4 + (z+j)^4 = 0 \qquad (EQ2)$$

a) Déterminer l'ensemble solution de (EQ2).

2. Résolution d'une ´équation polynomiale de degré 3 dans C:

- Soit : w et α deux nombres complexes :

$$w = -2 + 2j \qquad \alpha = 1 + j$$

- On rappelle que le nombre complexe Z_0 est définir par :

$$Z_0 = \frac{-1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) Vérifier que : $1 + Z_0 + \overline{Z_0} = 0$; $Z_0\overline{Z_0} = 1$; $\alpha^3 = w$.

b) Montrer que $(z-\alpha)(z - \alpha Z_0)(z - \alpha\overline{Z_0}) = z^3 - w.$

- En déduire :

(a) L'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = w$, d'inconnue $z \in C$

(b) L'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = \overline{w}$, d'inconnue $z \in C$.

2. EDL 1, 2

1. Résoudre les équations différentielles:

$$y'(x) - ay(x) = 2e^{ax}.$$

$$y'(x) - ay(x) = 2e^{\alpha x},\ \alpha \neq a$$

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^{2t} \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2. Application à la physique :

a) Soient **C** et **R** des constantes réelles strictement positives. Soit E une constante réelle.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{RC}u = 0 \\ \\ u(0) = E \end{cases}$$

- Résoudre le problème suivant sur $\mathbb{R}$.
- Que représente cette équation?

b) Soient **m** et **g** des constantes réelles strictement positives. Soient **λ** et $\mathbf{v_0}$ des constantes réelles positives.

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{\lambda}{m}v = -g \\ \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

- Résoudre le problème suivant sur $\mathbb{R}$.

Rp : Cette équation régit l'évolution de la vitesse verticale de chute **v** d'un système en fonction du temps t.

c) Soient **l** et **g** deux constantes réelles strictement positives. Soit $\boldsymbol{\theta_0}$ une constante réelle.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\theta = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dfrac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

- Résoudre le problème suivant sur $\mathbb{R}$.

Rp : Cette équation régit l'évolution de l'angle θ que fait un pendule avec la verticale en fonction du temps t.

3. GEOMETRIE

a) Produit vectoriel

On définit les trois vecteurs $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

- Evaluez si possible chacune des expressions suivantes :

a) $\vec{s} \wedge \vec{t}$ **b)** $\vec{u} \wedge \vec{t}$ **c)** $\vec{s} \wedge \vec{u}$ **d)** $(\vec{s} \wedge \vec{t}) \wedge \vec{u}$
e) $\vec{s} \wedge (\vec{t} \wedge \vec{u})$ **f)** $(\vec{s} \cdot \vec{t}) \wedge \vec{u}$ **g)** $\vec{s} \cdot (\vec{t} \wedge \vec{u})$

b) On donne le vecteur position d'une particule M par la relation :

$$\overrightarrow{r} = e^{2t}\overrightarrow{i} + 3t\overrightarrow{j}$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de M.

2. L'expression de la vitesse et l'accélération de M dans le système des coordonnées cartésiennes à l'instant t = 0.

c) On donne les composantes du vecteur position d'une particule M par le système suivant :

$$\begin{cases} x &= a\sin t\cos t \\ y &= a\sin t\sin t \end{cases}$$

ou a est une constante.

1. Déterminer les expressions de la vitesse et l'accélération de M dans le système des coordonnées cartésiennes, ainsi que leurs modules.

2. Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération dans le système des coordonnées polaire, vérifier leurs modules.

Utiliser les formules de la trigonométrie circulaire.

Barème : 5 – 8 – 7