

Final Automne 2005

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 8 points

1) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ forme-t-il une base du plan vectoriel \mathbb{R}^2 ? Justifier.

2) Dans la base B précédente. Quelles sont les coordonnées du vecteur $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 ?

3) Dans l'espace \mathbb{R}^3 , donner les équations paramétriques et cartésiennes du plan passant par $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) Deux vecteurs de même norme V font entre eux un angle θ . Déterminer en fonction de θ et V , la norme et la direction du "vecteur somme" puis des "vecteurs différence".

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 2 (NOUVELLE FEUILLE) - 8 points

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver une matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (avec des 1 sur la diagonale) telle que $A.P = P.D$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Trouver l'inverse de P

(c.a.d. la matrice $P^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $P.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

3) Montrer par récurrence que $A^n = P.D^n.P^{-1}$.

4) Exprimer A^n en fonction de n .

Exercice 3 (NOUVELLE FEUILLE) - 8 points

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = \frac{1}{2xy}$ avec $x > 0$ et $y > 0$.

2) $(x^2 + 1).y' + x.y = 0$.

3) $y' - 3.y = e^{3x}$

4) Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 36y = 0$.

Déterminer la solution particulière g de l'équation (E) telle que $g(\frac{\pi}{2}) = -1$ et $g(\frac{\pi}{4}) = 1$.