le 15 Janvier 2007

UTBM PM18

Final Automne 2006

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *(Applications directes du cours ou des TD) - 10 points*

Dans cet exercice, aucune question ne nécessite plus de quelques lignes pour être résolue

1) Donner l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions réelles à une variable réelle définies par

a) $f_1(x) = \ln(1 + x + x^2)$,

b) $f_2(x) = \ln(\cos(x))$,

c) $f_3(x) = \exp(\frac{x^2+3x+2}{x+1})$,

d) $f_4(x) = \sqrt{x^3 - x}$.

2) En utilisant la définition de la dérivée, trouver la valeur de la limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(\frac{x}{2})}{x-2} \ ?$$

3) Trouver toutes les matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *telles que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) trouver deux matrices à 3 lignes, 3 colonnes $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *non nulles telles que le produit* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 2 *(10 points)*

I - Équation du premier ordre à variables séparées.

a) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\ y' = -y^2.$$

b) Sur quel intervalle une solution est-elle définie ?

c) Quelle est la solution vérifiant $y(0) = 1$.

II - Équation différentielle linéaire du premier ordre.

a) Montrer que pour obtenir une solution particulière de

$$(E) : y' + a(x)y = g(x)$$

où $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ *avec* g_1, g_2 *et* a *définie sur* $\mathbb{R}$, *il suffit d'ajouter une solution particulière de*

$$(E_1) : y' + a(x)y = g_1(x)$$

et une solution particulière de

$$(E_2) : y' + a(x)y = g_2(x).$$

b) **Grâce à la question précédente**, *résoudre* **rapidement**, *en cherchant des solutions particulières évidentes, l'équation*

$$(E) : y' - 2y = (1 - 2x) - e^x.$$

III - Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Trouver toutes les solutions de

$$(E)\ y'' + y' - 2y = x.$$