Final Automne 2007

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie. Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification. Une feuille de notes A4 recto-verso est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 Géométrie dans l'espace (5 points)

On considère les droites $(D) : \left\{ \begin{array}{rcl} y - z & = & 2 \\ -x - y + 2 & = & 0 \end{array} \right.$ et $(\Delta) : \left\{ \begin{array}{rcl} -x + 3z & = & 1 \\ -x - 3y & = & 2 \end{array} \right.$.

1. Donner un vecteur directeur de (D) et de (Δ).
2. Donner une équation paramétrique de (Δ).
3. Soit M_α le point de (Δ) d'abscisse α (on a donc $M_\alpha(\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in (\Delta)$). Donner une équation du plan $\mathcal{P}_\alpha$ passant par M_α, et contenant (D).
4. (a) Pour quelle valeur α_0 de α, $\mathcal{P}_{\alpha_0}$ est-il perpendiculaire à (Δ) ?
   (b) Donner une équation de ce plan $\mathcal{P}_{\alpha_0}$, et donner les coordonnées de M_{α_0}.

Exercice 2 Équations différentielles (4 points)

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + y = f(x)$, où $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. On suppose que $f(x) = x + 1$.
   (a) Résoudre (E).
   (b) Combien de solutions vérifient $y(0) = 0$, et $y(\frac{\pi}{2}) = 0$?
   (c) Combien de solutions vérifient $y(0) = 0$, et $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$?
2. Mêmes questions en prenant $f(x) = (x - 1) \sin x$.

Exercice 3 Calcul matriciel (14 points)

Le but de cet exercice est de calculer de trois manières différentes les puissances d'une matrice. Les trois parties sont totalement indépendantes entre elles.
Dans cet exercice, on note

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A. Récurrence

1. Calculer A^2, puis montrer que $A^2 = 2I_3 - A$.
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}$, tels que $A^n = a_n I_3 + b_n A$.
3. En multipliant l'égalité précédente par A, montrer que $\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n \end{cases}$.
4. En déduire que $b_{n+2} = -b_{n+1} + 2b_n$.
5. Montrer par récurrence que $b_n = \frac{1}{3}(1 - (-2)^n)$.
6. Déterminer a_n et b_n en fonction de n.
7. Écrire enfin A^n en fonction de n.

Partie B. Binôme

1. Calculer N^2 en fonction de N et en déduire (sans récurrence) que pour tout $n \geqslant 1$: $N^{n+1} = 3N^n$.
2. En déduire N^n en fonction de n pour tout $n \geqslant 1$. Ce résultat est-il encore valable pour $n = 0$?
3. Montrer que $A = N - 2I_3$.

   On rappelle la formule du binôme : $(N - 2I_3)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k N^k (-2I_3)^{n-k}$, où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
4. En déduire que $A^n = \dfrac{1}{3}(1 - (-2)^n)N + (-2)^n I_3$.
5. Expliciter A^n (donner l'expression de ses coefficients).

Partie C. Diagonalisation

Soient $u = (-1, 0, 1)$, $v = (-3, 2, 0)$, et $w = (0, 1, 0)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}$.
2. Calculer sa matrice inverse P^{-1}.
3. Soit $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer que $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire l'expression de A^n en fonction de n.