Final PM18, Automne 2008

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Le barême, donné à titre indicatif, est susceptible de modification.

Une feuille de notes A4 recto-verso est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

Chaque exercice doit être rédigé sur une feuille différente.

Exercice 1 Équations différentielles (5 points)

1. Expliquer comment on résout une équation différentielle linéaire du premier ordre.

2. On cherche à résoudre l'équation différentielle de Bernoulli $(E) : y - xy' = \frac{y^3}{4}$.

a. On pose $z = \frac{1}{y^2}$. Montrer que z vérifie l'équation différentielle

$$(E') : z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{2x}.$$

b. Résoudre (E').

c. En déduire les solutions de (E).

d. Trouver la solution particulière satisfaisant à la condition initiale $y(1) = 1$.

Exercice 2 Exponentielle de matrice (7 points)

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées de taille n à coefficients complexes. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'ordre 3 (c'est à dire une matrice telle que $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, et $A^3 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$). Pour tout nombre complexe z, on note $E(z)$ la matrice $E(z) = I_n + z.A + \frac{z^2}{2}A^2$.

1. Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C}, E(z) \times E(z') = E(z + z')$.

2. En déduire que $(E(z))^n = E(nz)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que la matrice $E(z)$ est inversible. Quel est son inverse ?

4. Dans cette question $n = 3$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est nilpotente d'ordre 3.

b. Calculer $E(z)$.

Exercice 3 Géométrie affine (5 points)

1. Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $x+2y-z+1=0$ et $-x+y+z=0$ sont perpendiculaires.
2. Montrer que le point $A\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$.
3. Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
4. Soit $B\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Calculer la distance de B à $\mathcal{P}$, puis à $\mathcal{P}'$. En déduire la distance de B à $\mathcal{D}$.

Exercice 4 Barycentre (4 points)

1. Tracer un triangle ABC.
2. On considère A' le barycentre de $\{(B,2);(C,-3)\}$. Placer A' en justifiant la construction.
3. Faire de même pour B' barycentre de $\{(A,5);(C,-3)\}$ et C' barycentre de $\{(A,5);(B,2)\}$.
4. Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
   Indication : on pourra considérer le barycentre G de $\{(A,5);(B,2);(C,-3)\}$.