Examen final

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'attribution de la note.
Les documents de cours et la calculatrice sont autorisés.

Exercice 1

On identifie les éléments du plan $\mathbf{R}^2$ à des vecteurs colonnes de taille 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Nous étudierons dans cet exercice l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}.$$

L'objectif est de décrire géométriquement cette transformation du plan. Nous le ferons par deux méthodes différentes.

A. <u>1$^{\text{ère}}$ méthode</u> : utilisation des bases.

(a) Soit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Calculer $f(\vec{v}_1)$ et $f(\vec{v}_2)$.

(b) Montrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$ et vérifier que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs orthogonaux.

(c) Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$ dont les coordonnées dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ sont (a, b). Exprimer alors $f(\vec{u})$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(d) Après avoir représenté dans le plan les droites engendrées par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, représenter graphiquement les images par f de quelques points quelconques de $\mathbf{R}^2$.

(e) En déduire la nature géométrique de l'application f.

B. <u>2$^{\text{nde}}$ méthode</u> : utilisation des nombres complexes.

À tout point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbf{R}^2$ on peut associer le nombre complexe $z = x + iy$.

(a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels.

Soit z le nombre complexe associé au point $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et z' celui associé à $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Montrer que $z' = (a + ib)\bar{z}$.

(b) En déduire qu'en notation complexe, l'application f s'écrit $f(z) = c\bar{z}$, où c est un nombre complexe à déterminer.

(c) Écrire c sous forme exponentielle. En déduire que f est la composée de deux transformations géométriques simples.

(d) En déduire la nature géométrique de l'application f.

Exercice 2

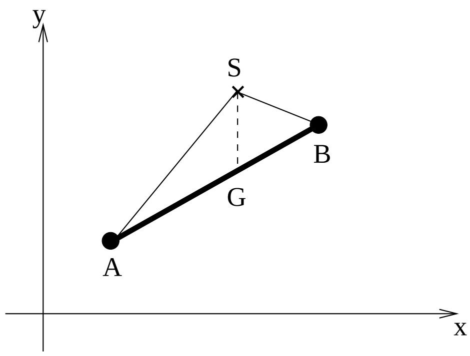
On considère l'équation différentielle $\quad (E) \quad y' = 1 + 2e^{-y}$.

1. Résolution de (E).
   (a) Soit y une solution de (E). On pose $z = e^y$. Montrer que z est solution de l'équation différentielle $\quad (E') \quad z' = z + 2$.
   (b) Résoudre l'équation (E').
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2. Étude d'une solution.
   (a) Montrer à partir de l'équation (E) que toutes les solutions sont des fonctions strictement croissantes.
   (b) Déterminer la solution de (E) satisfaisant $y(0) = 0$. On la notera y_0.
   (c) Montrer que y_0 n'est définie que sur l'intervalle $]\ln(\frac{2}{3}), +\infty[$.
   (d) Déterminer les limites de y_0 aux bornes de cet intervalle.
   (e) Tracer l'allure de la courbe de y_0.

Exercice 3

On considère une nacelle que l'on modélisera par deux masses situées aux points A et B et reliées par une baguette (dont on négligera la masse). Cette nacelle est accrochée à un point S à l'aide de deux cordes fixées aux deux extrêmités A et B. La masse en A est de 10kg et celle en B est inconnue. Les lois de la physique nous permettent d'affirmer qu'à l'équilibre, le centre de gravité de la nacelle est situé à la verticale du point S.



On suppose qu'à l'équilibre, le point A a pour coordonnées $(2, 2)$, le point B a pour coordonnées $(8, 5)$, la corde (AS) est dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 1)$ et la corde (BS) est dirigée par le vecteur $\vec{v} = (-2, 1)$. Le but de l'exercice est de déterminer la masse en B.

1. Donner les représentations paramétriques puis les équations cartésiennes des droites (AS) et (BS).
2. En déduire les coordonnées du point S.
3. On note m la masse en B. Déterminer en fonction de m les coordonnées du centre de gravité G de la nacelle.
4. En déduire la valeur de m pour laquelle G a la même abscisse que S.

   Si vous n'avez pas répondu à la question 2, il est autorisé de faire une figure pour déterminer S graphiquement.