Exercice 1

Affirmation	Réponse
1.	F
2.	F
3.	V
4.	F
5.	V
6.	V
7.	V
8.	V
9.	F
10.	F

1. Contre-exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour déterminant -1.
Donc A est inversible.

2. L'égalité est vraie à condition que $AB = BA$.

4. $\det(3M) = 27 \times \det(M)$.

9. Pour que la solution soit unique, il faut en plus une seconde condition initiale du type $y'(t_0) = c$.

10. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions

$$t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t} = \lambda\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,\ln(1+t^2)} = \lambda \sqrt{1+t^2}$$

Ces fonctions sont paires.

Exercice 2

Partie A

$$(E) \ : \quad y'' - 4\,y' + 4\,y = 4 - 5\,\cos t$$

1. Équation caractéristique associée à (E) :
$r^2 - 4r + 4 = 0 \iff (r-2)^2 = 0 \iff r = 2$

2. La solution générale de l'équation sans second membre associée à (E) est la fonction

$$t \longmapsto (A\,t + B)\,\mathrm{e}^{2t} \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ désignent des constantes réelles}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} y(t) &= a\sin t + b\cos t \\ y'(t) &= -b\sin t + a\cos t \\ y''(t) &= -a\sin t - b\cos t \end{aligned}$$

Donc $\quad y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (-a + 4b + 4a)\sin t + (-b - 4a + 4b)\cos t$

On veut que $\begin{cases} 3a + 4b = 0 \\ 3b - 4a = -5 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} b = -3a/4 \\ 25a/4 = 5 \end{cases}$

Donc $a = \dfrac{4}{5}$ et $b = -\dfrac{3}{5}$

Ainsi la fonction $t \longmapsto \dfrac{4}{5}\sin t - \dfrac{3}{5}\cos t$ est une solution particulière de $y'' - 4\,y' + 4\,y = -5\,\cos t$.

(b) Une solution particulière de (E) est la fonction

$$t \longmapsto 1 + \frac{4}{5}\sin t - \frac{3}{5}\cos t$$

4. Les solutions de (E) sont les fonctions :

$$t \longmapsto (A\,t + B)\mathrm{e}^{2t} + 1 + \frac{4}{5}\sin t - \frac{3}{5}\cos t \ \text{ avec } A \text{ et } B \text{ constantes réelles}$$

Partie B

1. (a) $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} y(t) = +\infty$

(b) $\forall\, t \geqslant 2,\ \dfrac{y\,(t)}{x\,(t)} = \dfrac{t^4 + 1}{t^4 - 2t}$

D'où $\ell = \displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{y\,(t)}{x\,(t)} = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{t^4}{t^4} = 1$

De plus $\forall\, t \in I,\ y\,(t) - \ell x\,(t) = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{2}{t}$

Donc $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} [y\,(t) - \ell x\,(t)] = 0^+$

(c) La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
La position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ est donnée par le signe de la différence

$$y(t) - x(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} > 0 \text{ pour tout réel } t > 0$$

Donc $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$.

2. (a) $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} y(t) = +\infty$

(b) $\forall t \in]0\,,1]$, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^4+1}{t^4-2t} = \dfrac{t^4+1}{t(t^3-2)}$

D'où $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -\infty$
On en déduit que le support $\mathscr{C}$ présente au voisinage de 0^+ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (Oy).

3. (a) Les fonctions x et y sont dérivables sur I et pour tout réel $t \in I$,

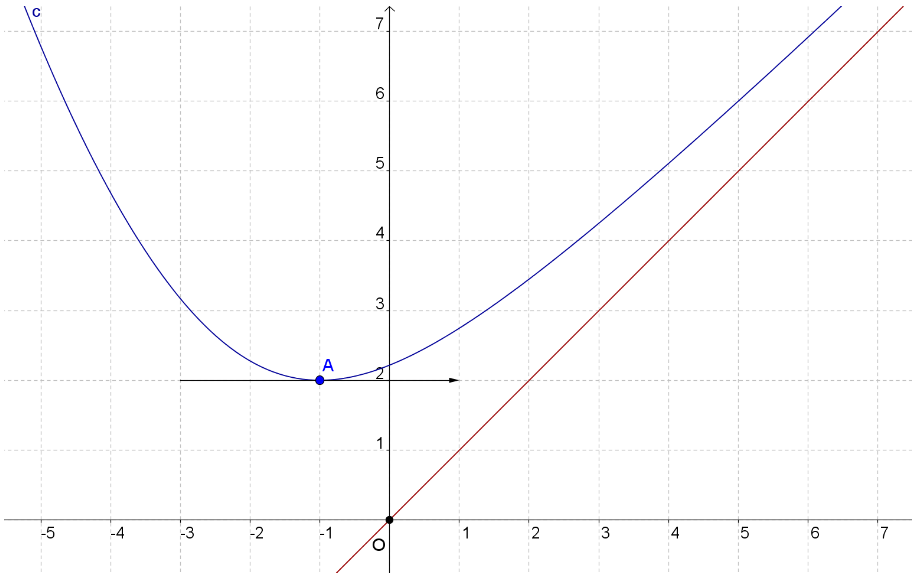
$$\begin{cases} x'(t) &= 2t + \dfrac{2}{t^2} \\ y'(t) &= 2t - \dfrac{2}{t^3} = \dfrac{2(t^4-1)}{t^3} = \dfrac{2(t^2-1)(t^2+1)}{t^3} \end{cases}$$

(b) Dans l'intervalle I, $y'(t) = 0 \iff t^2 - 1 = 0 \iff t = 1$
Signes de $x'(t)$ et de $y'(t)$:

$$\forall t > 0,\ x'(t) > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall t > 1,\ y'(t) > 0$$

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$	$\|$	$+$	(4)	$+$	
$x(t)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	$\|$	$-$	0	$+$	

4. Tracé de $\mathscr{C}$:



Exercice 3

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

On peut chercher α et β réels tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$ en résolvant un système à deux inconnues ou voir directement que $\boxed{A^2 = -A + 2I_3}$

2. On déduit de la question précédente que $2I_3 = A^2 + A = AA + AI_3$
d'où $I_3 = A\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3\right)$ avec $\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3\right) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3. (a) $A^0 = I_3 = 0A + 1I_3$ donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
$A^1 = A = 1A + 0I_3$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
$A^2 = -A + 2I_3$ donc $a_2 = -1$ et $b_2 = 2$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $A^n = a_n A + b_n I_3$ et

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = (a_n A + b_n I_3) A = a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n (-A + 2I_3) + b_n A \\ &= (b_n - a_n) A + 2a_n I_3 \end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture de A^{n+1} comme combinaison linéarie de A et de I_3, on obtient

$$\boxed{a_{n+1} = b_n - a_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 2a_n}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En substituant $n-1$ à n dans $b_{n+1} = 2a_n$, on a $b_n = 2a_{n-1}$. Donc $a_{n+1} = b_n - a_n = 2a_{n-1} - a_n$.

(d) $a_3 = 2a_1 - a_2 = 2 - (-1) = 3$ et $a_4 = 2a_2 - a_3 = -2 - 3 = -5$.

(e) • $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = b_n - a_n + 2a_n = a_n + b_n = u_n$.

La suite $\boldsymbol{u}$ est donc constante égale à $u_0 = a_0 + b_0 = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{a_n + b_n = 1}$$

• $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = b_{n+1} - 2a_{n+1} = 2a_n - 2(b_n - a_n) = 4a_n - 2b_n = -2(b_n - 2a_n) = -2\,w_n$.
La suite $\boldsymbol{w}$ est donc géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $w_0 = b_0 - 2a_0 = 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0\, q^n = (-2)^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{b_n - 2\,a_n = (-2)^n}$$

Finalement, pour tout entier n, $3a_n = 1 - (-2)^n$ d'où $a_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - (-2)^n\right)$ et donc $b_n = 2a_{n-1} = \dfrac{1}{3}\left(2 + (-2)^n\right)$