TRONC COMMUN

PM18

FINAL - AUTOMNE 2010

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES

L'utilisation de la calculatrice est interdite.

Exercice 1 (10 points)

Vous indiquerez pour chacune des dix affirmations suivantes si elle est Vraie ou Fausse, sans justification. Chaque réponse juste rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 1 point.

n désigne un entier naturel non nul.

1. Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, tous les coefficients de sa diagonale sont non nuls.
2. Pour toutes matrices carrées A et B appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $(A+B)^3 = A^3 + 3\,A^2B + 3\,AB^2 + B^3$.
3. Soit A une matrice carrée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors la matrice ${}^tA \cdot A$ est symétrique.
4. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, $\quad \det(3M) = 3 \times \det(M)$.
5. L'inverse d'une matrice diagonale et inversible, est une matrice symétrique.
6. L'ensemble des solutions d'un système linéaire, de 2 équations à 3 inconnues, ne peut pas contenir un seul élément.
7. Si la fonction f est une solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire $t\,y' + (t-1)y = t-1$ alors $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} f(t) = 1$
8. Soit $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle linéaire $y' + b(t)\,y = 0$ admet pour seule solution la fonction nulle si on impose $y(1) = 0$.
9. L'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = t\,\mathrm{e}^t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ admet une seule solution.
10. Les solutions de l'équation différentielle $(1+t^2)y' - t\,y = 0$ sont des fonctions impaires.

<u>Exercice 2</u> (20 points)

Dans cet exercice, des réponses brèves sont attendues. On ne demande pas de rédaction détaillée.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = 4 - 5\,\cos t$$

1. Résoudre l'équation caractéristique associée à (E).
2. En déduire la solution générale de l'équation sans second membre associée à (E).
3. (a) Déterminer deux constantes réelles a et b telles que la fonction $t \longmapsto a\,\sin t + b\,\cos t$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 4\,y' + 4\,y = -5\,\cos t$.
   (b) En déduire une solution particulière de (E).
4. Donner toutes les solutions de (E).

Partie B

On considère l'arc paramétré défini sur l'intervalle $I =]0\,,\,+\infty[$ par $\begin{cases} x\,(t) = t^2 - \dfrac{2}{t} \\ y\,(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

et $\mathscr{C}$ désigne sa trajectoire tracée dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$ du plan.

1. <u>Étude en $+\infty$.</u>
   (a) Donner les limites de x et de y en $+\infty$.
   (b) Déterminer la limite ℓ de $\dfrac{y\,(t)}{x\,(t)}$ lorsque $t \to +\infty$, puis celle de $[y\,(t) - \ell x\,(t)]$.
   (c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote, et préciser sa position par rapport à celle ci.
2. <u>Étude en 0.</u>
   (a) Donner les limites en 0^+ des fonctions x et y.
   (b) Déterminer la limite de $\dfrac{y\,(t)}{x\,(t)}$ en 0^+. Que peut-on en déduire pour le support $\mathscr{C}$?
3. <u>Variations de x et de y.</u>
   (a) Calculer $x'\,(t)$ et $y'\,(t)$ pour tout réel $t \in I$.
   (b) Étudier les signes de $x'(t)$ et de $y'(t)$.
   En déduire le tableau commun des variations de x et de y sur I.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ en y faisant apparaître la tangente horizontale et l'asymptote oblique.

Exercice 3 (10 points)

Cet exercice sera rendu sur une feuille séparée. La qualité de la rédaction et la présentation entreront pour une part importante dans la notation.

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^2.
   En déduire A^2 comme combinaison linéaire de A et de I_3.

2. A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse A^{-1}.

3. On admet que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple $(a_n\,, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A^n = a_n\,A + b_n\,I_3$$

   (a) Préciser les valeurs de $a_0\,, a_1\,, a_2$ et $b_0\,, b_1\,, b_2$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et a_{n-1}.

   (d) Calculer a_3 et a_4.

   (e) Que peut-on dire des suites $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{w}$ de termes généraux respectifs

$$u_n = a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad w_n = b_n - 2a_n\ ?$$