Exercice 1

Sujet A : 1.(d) - 2.(b) - 3.(a) - 4.(c) - 5.(b)
Sujet B : 1.(b) - 2.(b) - 3.(c) - 4.(a) - 5.(c)

Pour la dernière question, puisque les matrices I_3 et B commutent, on obtient par la formule du binôme de Newton : pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A^n = (I_3+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k}\, B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k$$

Or $\forall\, k \geqslant 2, \quad B^k = B.$ Donc $A^n = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B = I_3 + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\right] B$

avec $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right] - 1 = 2^n - 1.$

Ainsi $\boxed{A^n = I_3 + (2^n-1)\, B}$

Exercice 2

Sujet A

1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(1+t^2)\, y' + y = 0$ sont les fonctions :
$$t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t} = \lambda\, \mathrm{e}^{-\arctan t}$$
avec λ constante réelle.
2. On peut choisir comme solution particulière de (E) : $\quad (1+t^2)\, y' + y = 2$
la fonction constante $t \longmapsto 2$.
3. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions
$$t \longmapsto 2 + \lambda\, \mathrm{e}^{-\arctan t}$$
où λ désigne une constante réelle.
4. Soit f la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $\quad f(1) = 3$.
Alors, d'après la question précédente, il existe une constante réelle λ telle que pour tout réel t, $\quad f(t) = 2 + \lambda\, \mathrm{e}^{-\arctan t}$.
Or $f(1) = 3$. Donc $2 + \lambda\, \mathrm{e}^{-\arctan 1} = 2 + \lambda\, \mathrm{e}^{-\pi/4} = 3$. Donc $\lambda = \mathrm{e}^{\pi/4}$.
Ainsi $\boxed{f(t) = 2 + \exp\left(\frac{\pi}{4} - \arctan t\right)}$
5. En tant que solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du premier ordre, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,
$$f'(t) = 0 - \arctan'(t)\ \exp\left(\frac{\pi}{4} - \arctan t\right) = -\frac{1}{1+t^2}\ \exp\left(\frac{\pi}{4} - \arctan t\right)$$
Il est clair que pour tout réel t, $\ f'(t) < 0$. Par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Sujet B

1. $t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t} = \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}}$ avec λ constante réelle.
2. Fonction constante $t \longmapsto 1$
3. $t \longmapsto 1 + \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}}$
4. $\lambda = 2$ puis $\quad f(t) = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}}$
5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,
$$f'(t) = 0 + 2 \times (-1/2)\,(1+t^2)^{-\frac{1}{2}-1} \times 2\,t = -2t(1+t^2)^{-3/2}$$
$f'(t)$ est de signe contraire à celui de t.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^- =]-\infty\,,0]$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+ = [0\,,+\infty[$.

Exercice 3

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ Or $\dfrac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} \neq \dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$ car $0 \neq -1$
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.
(b) On peut choisir $\quad \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

(c) Le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$1(x-x_A)+(-2)(y-y_A)+2(z-z_A)=0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x-1-2y+4+2z-4=0$$

Donc $\boxed{(ABC)\ :\ x-2y+2z=1}$

2. L'aire du triangle ABC est :

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{n}\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=\frac{\sqrt{9}}{2}=\frac{3}{2}$$

3. (a) On constate d'abord que la première équation du système est celle du plan (ABC). Notons $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x-3y+2z=-2$.
Comme $x_C-3y_C+2z_C=1-9+6=-2$, le point C appartient à $\mathscr{P}$.
Donc $C\in(ABC)\cap\mathscr{P}=\Delta$.

(b) On cherche à calculer les coordonnées d'un point D de Δ tel que $D\neq C$. Fixons par exemple $z_D=0$. Alors

$$\begin{cases} x_D-2y_D=1 \\ x_D-3y_D=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_D-2y_D=1 \\ y_D=3\ (L_2\longleftarrow -L_2+L_1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_D=7 \\ y_D=3 \end{cases}$$

Donc le point $D(7;3;0)$ appartient à Δ et on peut choisir comme vecteur directeur de Δ le vecteur $\overrightarrow{CD}$ ou encore le vecteur

$$\overrightarrow{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_D-x_C \\ y_D-y_C \\ z_D-z_C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. La distance d du point A à la droite Δ est donnée par la formule :

$$d=\frac{\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$$

avec $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

D'où $\quad d=\dfrac{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

5. On travaille toujours dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et nous avons $\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{w})=0$

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{w})=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & t \end{vmatrix}=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad -4t+0+0-2-0-0=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad -4t-2=0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4t=-2 \\
&\Longleftrightarrow \quad t=-1/2
\end{aligned}$$