Tronc commun

PM18

Final - Automne 2011

Durée de l'épreuve : 2 heures

Une feuille de notes manuscrites est le seul document autorisé.
L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone est donc interdite.

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. On demande d'indiquer laquelle sans justification. Chaque réponse juste rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Vous pouvez décider de ne pas répondre à certaines questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à zéro.

Soit t un nombre réel. On se donne la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ t & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

1. La matrice A est ...

   (a) triangulaire supérieure

   (b) carrée d'ordre 3

   (c) symétrique

   (d) inversible pour tout nombre réel t

2. La matrice A est inversible si, et seulement si,

   (a) $t \neq 0$ (b) $t \neq 1$ (c) $t \neq -1$ (d) $t = 1$

3. On suppose dans cette question que $t = 1/2$. Alors A est inversible et son inverse est...

   (a) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1/2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Pour les deux dernières questions, on suppose que $t = 0$.
   Soit $B = A - I_3$. Alors $B^2 = \ldots$

   (a) B (b) $\mathbb{O}_3$ (c) I_3 (d) $-B$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = 0$. La formule du binôme permet d'obtenir : $A^n = \ldots$

   (a) $I_3 + B^n$ (b) A (c) $I_3 + \left[\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}\right] B$ (d) $I_3 + n\,B$

Exercice 2 (5 points)

Dans cet exercice, des réponses brèves sont attendues. On ne demande pas de rédaction détaillée.

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1+t^2)\,y' + t\,y = t$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Proposer une fonction g, solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale
$$f(0) = 3$$
5. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (10 points)

Cet exercice sera rendu sur une feuille séparée. La qualité de la rédaction et la présentation entreront pour une part importante dans la notation.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(1\ ;\ 2\ ;\ 2),\qquad B(3\ ;\ 2\ ;\ 1)\quad \text{et}\quad C(1\ ;\ 3\ ;\ 3)$$

1. (a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC).
   (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. La droite Δ est définie par le système d'équations linéaires :
$$\begin{cases} x-2y+2z &= 1 \\ x-3y+2z &= -2 \end{cases}$$
   (a) Vérifier que le point C appartient à la droite Δ.
   (b) Proposer vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ.
4. Calculer la distance du point A à la droite Δ.
5. On considère le vecteur $\vec{w} = \vec{i} + t\,\vec{k}$ où $t \in \mathbb{R}$.
   Pour quel(s) nombre(s) réel(s) t, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?