

Final automne 2013

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 4 points

1) Déterminer, sous la forme arithmétique $x + iy$, les racines carrées de $-3 + 4i$.

3) Déterminer les solutions de l'équation

$$z^2 - (2 + i).z + 3 + i = 0.$$

Exercice 2 - 8 points

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver une matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (avec **des 1 sur la diagonale**) telle que $A.P = P.D$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Trouver l'inverse de P

(c.a.d. la matrice $P^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $P.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

3) Montrer **par récurrence** que $A^n = P.D^n.P^{-1}$.

4) Exprimer A^n en fonction de n .

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - 9 points

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) Equation différentielle du premier ordre à variables séparées :

$$(E_1) \quad y' = \frac{1}{2xy}$$

avec $x > 0$ et $y > 0$.

2) Equation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E_2) \quad xy' + y = e^x.$$

3) Equation différentielle linéaire du second ordre :

$$(E_3) \quad y'' + 36y = 0.$$

Déterminer la solution particulière g de l'équation (E) telle que $g(\frac{\pi}{2}) = -1$ et $g(\frac{\pi}{4}) = 1$.