

Final automne 2017

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 4 points

1. Résoudre l'équation

$$z^2 + (6 - i)z + 2 + 6i = 0.$$

2. Déterminer les racines cubiques de

$$4\sqrt{2}(1 + i).$$

Exercice 2 - 4 points

Soit la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

1) Calculer $M(a).M(b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

2) En déduire $(M(a))^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$, $a \in \mathbb{R}$ (on fera un raisonnement par récurrence).

Exercice 3 - 3 points

Déterminer toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 4 - 9 points

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) Equation différentielle du premier ordre à variables séparées :

Soit (E_1) $2.y'.\sqrt{x} = y$.

Déterminer la solution particulière g de l'équation (E_1) telle que $g(0) = 1$.

2 Equation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E_1) y' + y = 2.e^x.$$

Déterminer la solution particulière g de l'équation (E_1) telle que $g(0) = 0$.

3) Equation différentielle linéaire du second ordre :

Soit (E_2) l'équation différentielle $y'' - y = -x^2 + 1$. Déterminer les solutions de (E_2) .