

Final automne 2014

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 4 points

Soit la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- 1) Calculer $M(a).M(b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
- 2) En déduire $(M(a))^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$, $a \in \mathbb{R}$ (on fera un raisonnement par récurrence).

Exercice 2 - 3 points

Déterminer toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.A$$

Exercice 3 - 8 points

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) Equation différentielle du premier ordre à variables séparées :

$$(E_1) \quad y' \cdot (1 + x^2) = 4x \cdot \sqrt{y}.$$

- 2) Equation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E_2) \quad xy' - 2y = -\frac{3}{x}$$

- 3) Equation différentielle linéaire du second ordre :

$$(E_3) \quad y'' + y' + y = 13 \cos(2x).$$

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 4 - 5 points

Soit l'équation différentielle

$$(E) \ y'' + x.y' - 2.y = 0.$$

1. Déterminer une solution y_0 de l'équation (E) qui soit un polynôme du second degré.
2. En posant $y = y_0.z$, déterminer toutes les solutions de E.