

Final automne 2015

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 6 points

1. Résoudre l'équation

$$\sqrt{12} \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x) = \sqrt{8}.$$

2. Ecrire sous forme trigonométrique le complexe

$$4 \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + i).$$

3. Déterminer les racines cubiques de

$$4 \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + i).$$

Exercice 2 - 4 points

1. Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot M = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - 6 points

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) **Equation différentielle linéaire du premier ordre :**

$$(E_1) \quad y' + y = 2.e^x.$$

Déterminer la solution particulière g de l'équation (E_1) telle que $g(0) = 0$.

3) **Equation différentielle linéaire du second ordre :**

Soit (E_2) l'équation différentielle $y'' - y = -x^2 + 1$. Déterminer les solutions de (E_2) .

Exercice 4 - 4 points

1. Montrer que $y_0 = -\frac{1}{x}$ est solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1.$$

2. En déduire toutes les solutions de l'équation en posant $z = \frac{1}{y-y_0}$.