

# Final automne 2016

*Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main*

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

## Exercice 1 - 7 points

1. *Ecrire sous forme arithmétique le complexe*

$$\frac{1+i}{1-i} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}.$$

2. *Déterminer les racines carrées de*

$$5 + 12i.$$

3. *On pose  $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ .*

1. *Ecrire  $z^2$  sous forme algébrique.*

2. *En déduire la forme exponentielle de  $z^2$ .*

3. *Déterminer le module et un argument de  $z$ .*

## Exercice 2 - 4 points

1. *Déterminer toutes les matrice  $M \in M_2(\mathbb{R})$  telles que :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + M = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Montrer par récurrence que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

TOURNER LA PAGE SVP

**Exercice 3 - 5 points**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) Soit  $(E_1)$   $2.y' \cdot \sqrt{x} = y$ .

Déterminer la solution particulière  $g$  de l'équation  $(E_1)$  telle que  $g(0) = 1$ .

3) Soit  $(E_2)$  l'équation différentielle  $y'' - 3y' + y = x - 3$ .

Déterminer les solutions de  $(E_2)$ .

**Exercice 4 - 4 points**

1. Montrer que  $y_0 = -\frac{1}{x}$  est solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1.$$

2. En déduire toutes les solutions de l'équation en posant  $z = \frac{1}{y-y_0}$ .